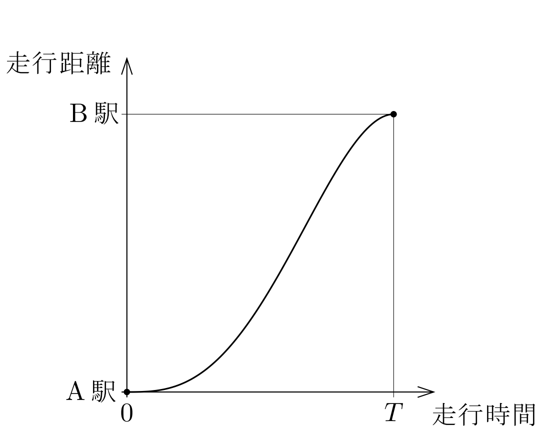
§6.0　定積分の概念

2.5 節で述べたように，関数 f の微分係数は，f の値 $f(x)$ が変化する“速さ”でした．例えば，列車の走行距離を時刻で微分すると走行速度[1] が求められます．今度は逆に，走行速度から走行距離を求めることを考えます．

$\boxed{\text{例解}}$　あるとき，列車がA駅を発車してから T 秒後に次のB駅に到着したとします．列車の速度計を見ると走行速度は測定できます．A駅を発車して ξ 秒後の列車の速さを $f(\xi)$m/s とします．列車の走行距離は測定できません．この列車のA駅からB駅までの走行距離を求めたいとします．

列車の走行速度は一定ではありません．A駅を発車した直後の速度は低く，中ごろの速度はだいたい一定で，B駅に着く前に速度はまた低くなります．列車がA駅を発車してからの走行時間と走行距離との関係は概ね右のグラフのようになります（勿論このグラフの正確な形は分かりません）．



そこで，走行距離の近似値を求めるために，A駅からB駅までの列車の走行時間を仮に3分割して考えます．

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = T$$

となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3 をとります；そして，A駅からB駅までの列車の走行時間 T 秒間を，A駅を発車してから，

x_0 秒後 ～ x_1 秒後の間，x_1 秒後 ～ x_2 秒後の間，x_2 秒後 ～ x_3 秒後の間，

の3つの時間に分割します．そして，

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1\,, \qquad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2\,, \qquad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$$

となる実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 をとります．列車の速さは，A駅を発車してから，

ξ_1 秒後で $f(\xi_1)$m/s，ξ_2 秒後で $f(\xi_2)$m/s，ξ_3 秒後で $f(\xi_3)$m/s

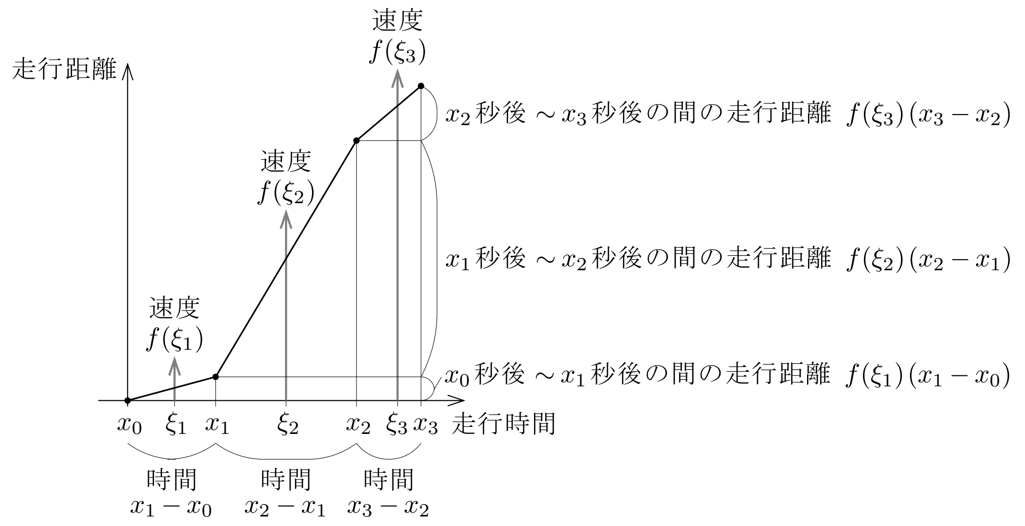
です．近似的に，A駅を発車してから，

x_0 秒後 ～ x_1 秒後の間を $f(\xi_1)$m/s の一定速度で，
x_1 秒後 ～ x_2 秒後の間を $f(\xi_2)$m/s の一定速度で，
x_2 秒後 ～ x_3 秒後の間を $f(\xi_3)$m/s の一定速度で，

列車が走行したとみなします．一定速度で走行している間は，

〔走行距離〕=〔速度〕×〔走行時間〕

ですから，走行距離は走行時間に比例します．従って，走行時間（単位は秒）と走行距離（単位は m）との関係を近似するグラフは例えば次のような折れ線になります．



A駅からB駅まで T 秒間の走行距離（単位は m）は近似的に次の式で表されます：

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2)\ .$$

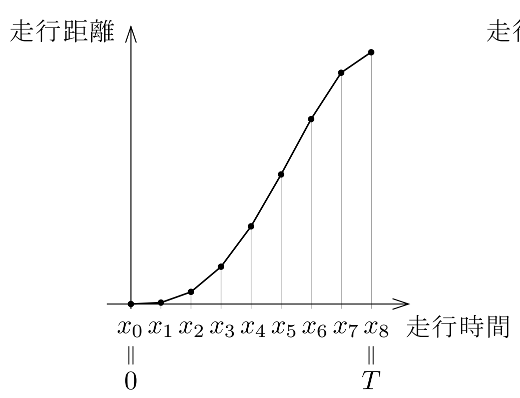
正の自然数 n に対して，

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = T$$

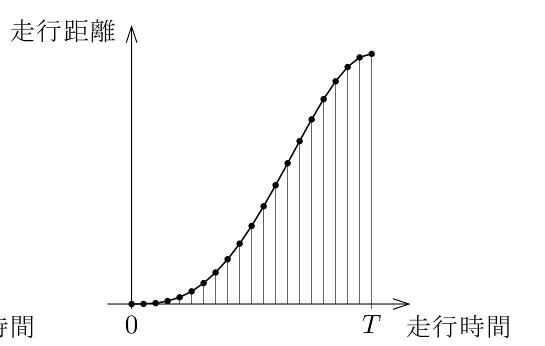
となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとります．A駅からB駅までの列車の走行時間 T 秒間を，A駅を発車してから，x_0 秒後 ～ x_1 秒後の間，x_1 秒後 ～ x_2 秒後の間，x_2 秒後 ～ x_3 秒後の間，…，x_{n-1} 秒後 ～ x_n 秒後の間，の n 個の短い時間に分割します．次に，

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1\,,\quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2\,,\quad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3\,,\quad \cdots\,,\quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

となる実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとります．$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，A駅を発車して ξ_k 秒後の走行速度は $f(\xi_k)$m/s です．近似的に，A駅発車して x_{k-1} 秒後 ～ x_k 秒後の短時間を $f(\xi_k)$m/s の一定速度で列車が走行したと考えます．近似計算による走行時間と走行距離との関係を表すグラフは次のような折れ線になります．



$n = 8$　のとき



$n = 20$　のとき

A駅からB駅までの走行距離（単位は m）を近似する式は次のようになります：

$$f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1})\ .$$

このような式の値を関数 f のリーマン和といいます．これを S_n とおきます：

$$\begin{aligned} S_n &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}\ . \end{aligned}$$

分割の数 n を大きくしていくと，走行距離の近似は正確になるようなので，走行距離の近似値 S_n は実際の走行距離に近づくようです．従って，リーマン和 S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ があるならば，この極限値が実際の走行距離になるようです．　$\boxed{\text{終}}$

関数 f のリーマン和 S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を関数 f の定積分といいます．

---

[1] ここでいう“速度”とは正確にいうと“速さ”のことです．