

§6.1 定積分の定義

実数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表します：

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

例えば次のようになります：

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5, \quad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2}.$$

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとします。

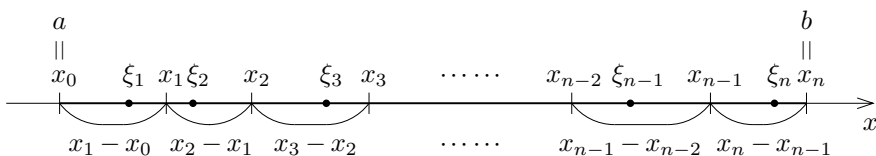
正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり²⁾、区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ に分割します。更に、

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1, \quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2, \quad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3, \quad \dots, \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

となる実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとります³⁾。 ξ_k ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数です。



区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$ 、 $[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$ 、 $[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_2$ 、 \dots 、 $[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$ 、の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}.$$

また、各区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおきます：

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \dots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

この S_n の値を f のリーマン和⁴⁾ といいます。リーマン和 S_n は正の自然数を表す変数 n の関数です。実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をどう定めるかによって様々なリーマン和ができます。

$n \rightarrow \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとします；つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とします⁵⁾。 $n \rightarrow \infty$ のときどのようなリーマン和 S_n も収束して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まる⁶⁾ とき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を a から b までの f の定積分 (definite integral) といひ、 $\int_a^b f(x) dx$ と書き表します。

つまり、大雑把にいうと、関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限です。

改めて定積分の定義を述べます。この定義は覚えてほしいと思います。

定義 実数 a と b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\begin{aligned} \delta_n &= \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}, \\ S_n &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \end{aligned}$$

とおく。 S_n を f のリーマン和という。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ となるどのようなリーマン和 S_n も $n \rightarrow \infty$ のとき収束して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば、関数 f は a から b まで (定) 積分可能であるといひ、 f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を次のように定義する：

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 f は b から a まで積分可能であるといひ、 f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x) dx$ を次のように定義する：

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

実数 a と b に対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき、 a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ を求めることを f を a から b まで (定) 積分するといひます。また、定積分 $\int_a^b f(x) dx$ において、 a を定積分の下端といひ、 b を定積分の上端といひ、区間 $[a, b]$ を積分区間といひます；更に、 f を被積分関数といひ、 x を積分変数といひます。

定積分の定義より直ぐに次の定理が導かれます (証明は省略します)。

定理 6.1.1 実数 a が関数 f の定義域に属するとき、

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

定理 6.1.2 実数 a と b に対して、関数 f が a から b まで積分可能であるとき、

$$\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx.$$

この定理は、 $a \leq b$ のときは定積分の定義に含まれますが、 $a > b$ のときは別途証明されることです。

関数は連続である範囲で積分可能です。正確にいうと次の定理が成り立ちます (証明は省略します)。

定理 6.1.3 実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるならば、 f は a から b まで積分可能である。

²⁾ n の値が変わると $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ の値も (大抵は) 変わります。

³⁾ n の値が変わると $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ の値も (大抵は) 変わります。

⁴⁾ リーマンは 19 世紀のドイツの数学者です。

⁵⁾ $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ でないと収束しないリーマン和がいくらでもできます。

⁶⁾ 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が、自然数 n に対する実数 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ のとりかたとは無関係に決まるということです。