§6.1　定積分の定義

実数 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ の中で最も大きい実数を次のように書き表します：

$$\max\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} \ .$$

例えば次のようになります：

$$\max\{-2, 5, 3, -7\} = 5 \ , \qquad \max\left\{\frac{5}{6}, 3, \frac{9}{2}, \frac{7}{3}, 4\right\} = \frac{9}{2} \ .$$

実数 a, b について $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとします．

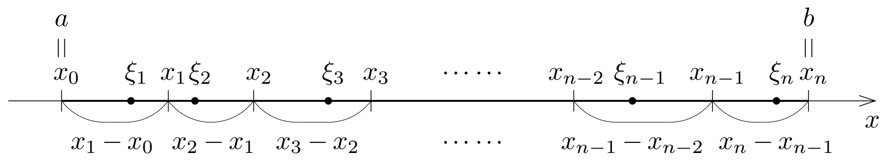
正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり[2]，区間 $[a, b]$ を n 個の小区間 $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ に分割します．更に，

$$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \ , \quad x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \ , \quad x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \ , \quad \cdots \ , \quad x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n$$

となる実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとります[3]．ξ_k（$k = 1, 2, 3, \ldots, n$）は小区間 $[x_{k-1}, x_k]$ から選ばれた実数です．



区間 $[x_0, x_1]$ の幅 $x_1 - x_0$，$[x_1, x_2]$ の幅 $x_2 - x_1$，$[x_2, x_3]$ の幅 $x_3 - x_1$，…，$[x_{n-1}, x_n]$ の幅 $x_n - x_{n-1}$，の中で最も大きいものを δ_n とおきます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ .$$

また，各区間 $[x_{k-1}, x_k]$（$k = 1, 2, 3, \ldots, n$）の幅 $x_k - x_{k-1}$ と関数 f の値 $f(\xi_k)$ との積 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ の総和を S_n とおきます：

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) + \cdots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \ . \end{aligned}$$

この S_n を f の**リーマン和**といいます[4]．

$n \to \infty$ のとき小区間 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ の幅は総て 0 に収束するとします；つまり $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ とします．$n \to \infty$ のときリーマン和 S_n が収束して，極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まる[5] とき，極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を a から b までの f の**定積分** (definite integral) といい，$\int_a^b f(x)\,dx$ と書き表します．

つまり，大雑把にいうと，関数 f の定積分とは f のリーマン和の極限です．

改めて定積分の定義を述べます．この定義は覚えてほしいと思います．

> **定義**　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとする．正の各自然数 n に対して，
>
> $$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$
>
> となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，
>
> $$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ ,$$
>
> $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$
>
> とおく．S_n を f のリーマン和という．$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0$ とする．リーマン和 S_n の極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ が関数 f 及び実数 a, b だけから唯一つに決まるならば，関数 f は a から b まで（定）積分可能であるといい，f の a から b までの定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} S_n \ .$$
>
> 関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 f は b から a まで積分可能であるといい，f の b から a までの定積分 $\int_b^a f(x)\,dx$ を次のように定義する：
>
> $$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

実数 a と b とに対して関数 f が a から b まで積分可能であるとき，a から b までの f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを f を a から b まで（定）積分するといいます．また，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ において，a を定積分の下端といい，b を定積分の上端といい，区間 $[a, b]$ を積分区間といいます；更に，f を被積分関数といい，x を積分変数といいます．

定積分の定義より直ぐに次の定理が導かれます（証明は省略します）．

定理 6.1.1　実数 a が関数 f の定義域に属すとき，

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \ .$$

定理 6.1.2　実数 a と b とに対して，関数 f が a から b まで積分可能であるとき，

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

この定理は，$a \leq b$ のときは定積分の定義に含まれますが，$a > b$ のときは別途証明されることです．

関数は連続である範囲で積分可能です．正確にいうと次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 6.1.3　実数 a と b とが属するある区間において関数 f が連続であるならば，f は a から b まで積分可能である．

---

2)　n の値が変わると $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ の値も（普通は）変わります．

3)　n の値が変わると $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ の値も（普通は）変わります．

4)　ダルブー和ということもあります．

5)　極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ が，自然数 n に対する実数 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ のとりかたとは無関係に決まるということです．