§6.10　定積分を用いる極限計算

定積分はリーマン和の極限値ですから，リーマン和の極限値を計算するために定積分を用いることがあります.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{4}{n}k+3}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して，$n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{4}{n}k+3$ （$k=0,1,2,3,\dots,n$）と定める． この数列は公差が $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり,

$$3=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=7\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{4}{n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{4}$.
よって,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k-x_{k-1}}{4}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

これは関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和である.

$$\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_1,\,\dots,\,x_n-x_{n-1}\}=\frac{4}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって関数 $\dfrac{\sqrt{x}}{4}$ のリーマン和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^7\frac{\sqrt{x}}{4}\,dx$ に収束する． 故に,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{4}{n}k+3}\right)&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\sqrt{x_k}}{4}(x_k-x_{k-1})\right\}=\int_3^7\frac{\sqrt{x}}{4}\,dx\\&=\frac{1}{4}\int_3^7x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{1}{4}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_3^7=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(7\sqrt{7}-3\sqrt{3})\\&=\frac{7\sqrt{7}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.10.1}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{5}{n}k+2}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\left\{\dfrac{3\pi}{2n}(k-1)-\dfrac{\pi}{6}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{3\pi}{2n}k-\dfrac{\pi}{6}$ （$k=0,1,2,3,\dots,n$）と定める；この数列は公差が $\dfrac{3\pi}{2n}$ の等差数列であり,

$$-\frac{\pi}{6}=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=\frac{4\pi}{3}\ .$$

$x_k-x_{k-1}=\dfrac{3\pi}{2n}$ より $\dfrac{1}{n}=\dfrac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}$ なので,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos x_{k-1}\cdot\frac{2(x_k-x_{k-1})}{3\pi}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .\end{aligned}$$

これは関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和である.

$$\max\{\,x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\dots,x_n-x_{n-1}\,\}=\frac{3\pi}{2n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって関数 $\dfrac{2\cos x}{3\pi}$ のリーマン和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{2\cos x}{3\pi}\,dx$ に収束する.
故に,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left\{\frac{3\pi}{2n}(k-1)-\frac{\pi}{6}\right\}\right]&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2\cos x_{k-1}}{3\pi}(x_k-x_{k-1})\right\}\\&=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\frac{2\cos x}{3\pi}\,dx=\frac{2}{3\pi}\big[\sin x\big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{4\pi}{3}}\\&=\frac{2}{3\pi}\left\{\sin\frac{4\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=\frac{2}{3\pi}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)\\&=\frac{1-\sqrt{3}}{3\pi}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.10.2}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\left\{\dfrac{7\pi}{6n}(k-1)-\dfrac{\pi}{3}\right\}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{6}{3k+4n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べる.

自然数 k に対して

$$\frac{6}{3k+4n}=\frac{6}{n\left(\dfrac{3k}{n}+4\right)}=\frac{1}{n}\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\ .$$

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ を $x_k=\dfrac{3}{n}k+4$ （$k=0,1,2,3,\dots,n$）と定める． この数列は公差が $\dfrac{3}{n}$ の等差数列であり,

$$4=x_0\le x_1\le x_2\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le x_n=7\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ について， $x_k-x_{k-1}=\dfrac{3}{n}$ なので $\dfrac{1}{n}=\dfrac{x_k-x_{k-1}}{3}$.
よって,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{3k+4n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{\dfrac{3}{n}k+4}\frac{1}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{6}{x_k}\frac{x_k-x_{k-1}}{3}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k-x_{k-1})\right\}\ .$$

これは関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和である.

$$\max\{x_1-x_0,\,x_2-x_1,\,x_3-x_1,\,\dots,\,x_n-x_{n-1}\}=\frac{3}{n}\ ;$$

これは $n\to\infty$ のとき 0 に収束する． よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{2}{x_k}(x_k-x_{k-1})\right\}$ は $n\to\infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_4^7\frac{2}{x}\,dx$ に収束する． 故に,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6}{3k+4n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k-x_{k-1})\right\}=\int_4^7\frac{2}{x}\,dx\\&=2\big[\ln|x|\big]_4^7=2(\ln7-\ln4)=2\ln\frac{7}{4}\\&=\ln\frac{49}{16}\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.10.3}}$　正の自然数を表す変数 n の関数 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{8}{4k+3n}$ について，ある関数のリーマン和であることを説明して， $n\to\infty$ のときの極限値を調べなさい.