

## §6.2 定積分の図形的意味

定積分の定義に基づいて定積分の図形的意味を考えます。

実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とします. 関数  $f$  は区間  $[a, b]$  において連続で,  $[a, b]$  において  $f(x) \geq 0$  とします.

正の各自然数  $n$  に対して,

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  をとり,  $\delta_n$  と  $S_n$  とを次のように定めます:

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}.$$

$S_n$  は  $f$  のリーマン和です.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とします. 関数  $f$  は区間  $[a, b]$  において連続なので, 定理 6.1.3 より,  $f$  は  $a$  から  $b$  までの定積分可能です; 従って

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

まず  $n=3$  のときを考えます.  $xy$  座標平面において, 右の図の長方形の領域3個を併せた図形(網掛けの部分)の面積は

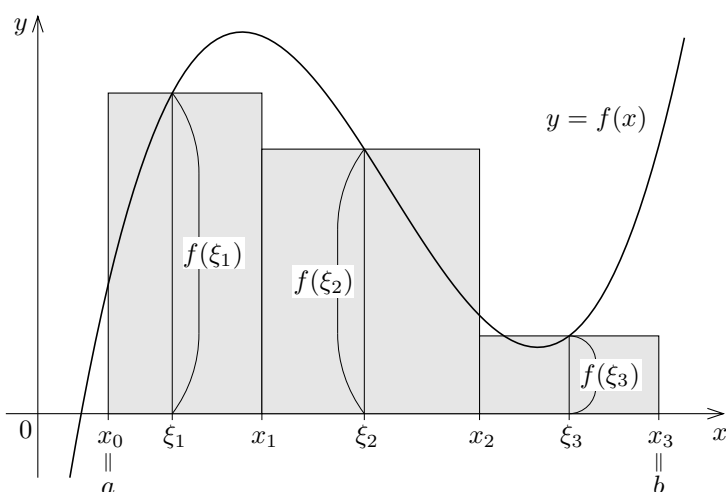
$$y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2).$$

このように考えると, 関数  $f$  のリーマン和

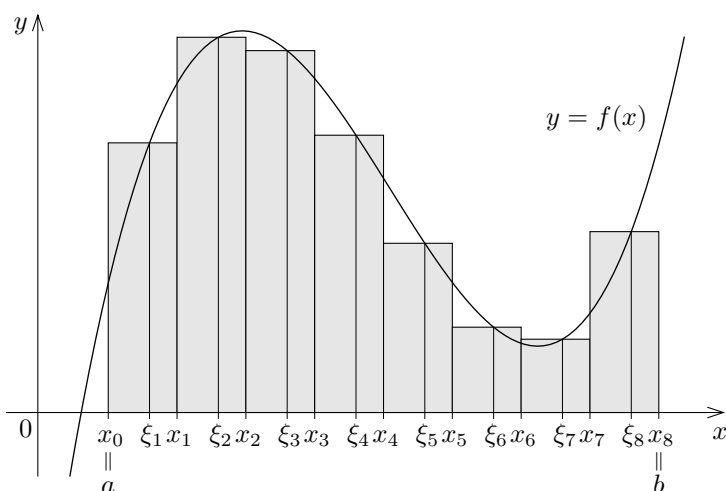
$$S_3 = \sum_{k=1}^3 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2)$$

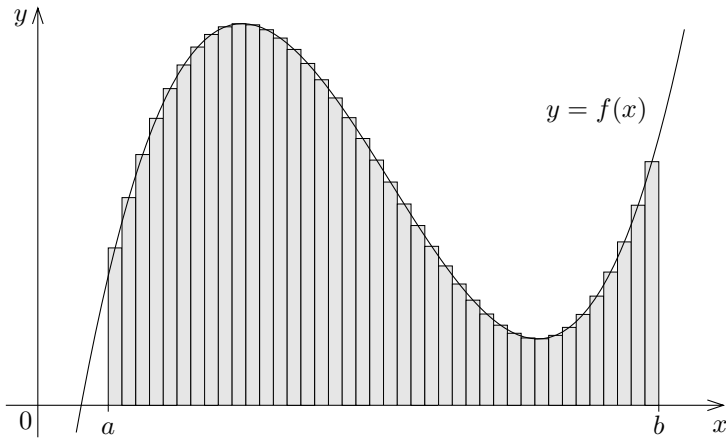
は, 次の図の長方形の領域3個を併せた図形(網掛けの部分)の面積を表します.



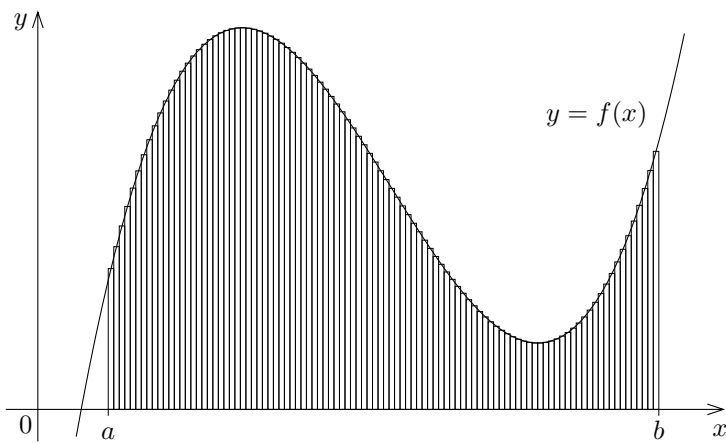
$n=8$  のとき, 関数  $f$  のリーマン和  $S_8 = \sum_{k=1}^8 \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は, 次の図の長方形の領域8個を併せた図形(網掛けの部分)の面積を表します.



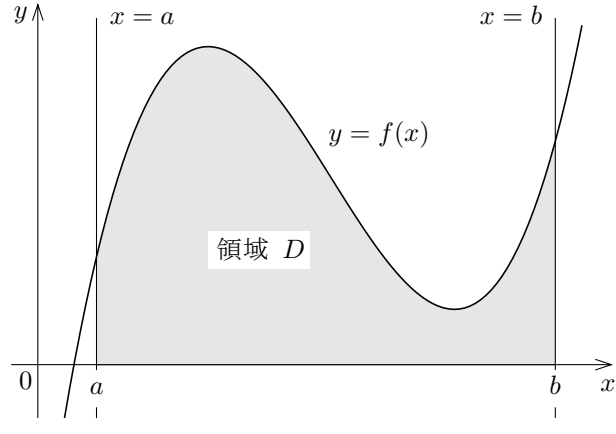
正の自然数  $n$  に対して, 関数  $f$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は, このような長方形の領域  $n$  個を併せた図形の面積を表します. 例えば,  $n=40$  のとき,  $f$  のリーマン和  $S_{40} = \sum_{k=1}^{40} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は, 次の図の細長い長方形の領域40個を併せた図形(網掛けの部分)の面積を表します.



更に,  $n=100$  のとき,  $f$  のリーマン和  $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$  は, 次の図の細長い長方形の領域100個を併せた図形の面積を表します.



$n$  を限りなく大きくしていくと, 細長い長方形の領域100個を併せた図形は, 関数  $y=f(x)$  のグラフと  $x$  軸と直線  $x=a$  と  $x=b$  とで囲まれる領域  $D$  に限りなく近づきます.



ですから,  $n \rightarrow \infty$  のとき, 細長い長方形の領域  $n$  個を併せた図形の面積  $S_n$  は領域  $D$  の面積に近づきそうです. つまり, 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は  $D$  の面積になりそうです.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$  ですから, 定積分  $\int_a^b f(x) dx$  は  $D$  の面積になりそうです.

実際に次の定理が成り立ちます(証明は省略します).

**定理** 実数  $a, b$  について  $a \leq b$  とする. 関数  $f$  は区間  $[a, b]$  において連続であり, 区間  $[a, b]$  において  $f(x) \geq 0$  とする.  $xy$  座標平面において, 2直線  $x=a$ ,  $x=b$  と  $x$  軸と  $y=f(x)$  のグラフとで囲まれる領域の面積は  $\int_a^b f(x) dx$ .

