§6.2　定積分の図形的意味

実数 a と b について $a \leq b$ とします． 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続で，$[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とします． 関数 f のグラフにおける f の定積分の意味を考えます．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，δ_n と S_n とを次のように定めます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

S_n は f のリーマン和です．

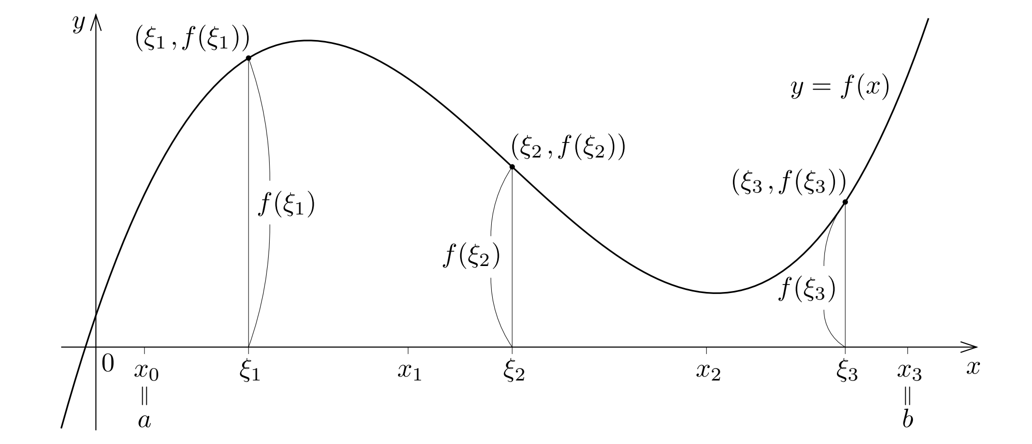
$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします． 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続なので，定理6.1.3より，f は a から b までの定積分可能です；従って

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx .$$

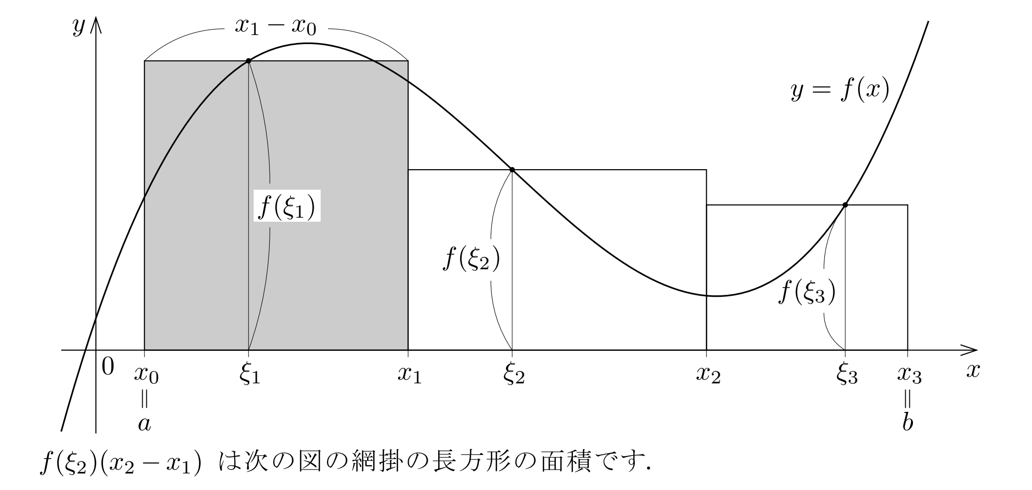
まず $n = 3$ のときを考えます． $a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 = b$ となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して，関数 f のリーマン和 S_3 は

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{k=1}^{3} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \\ &= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2) . \end{aligned}$$

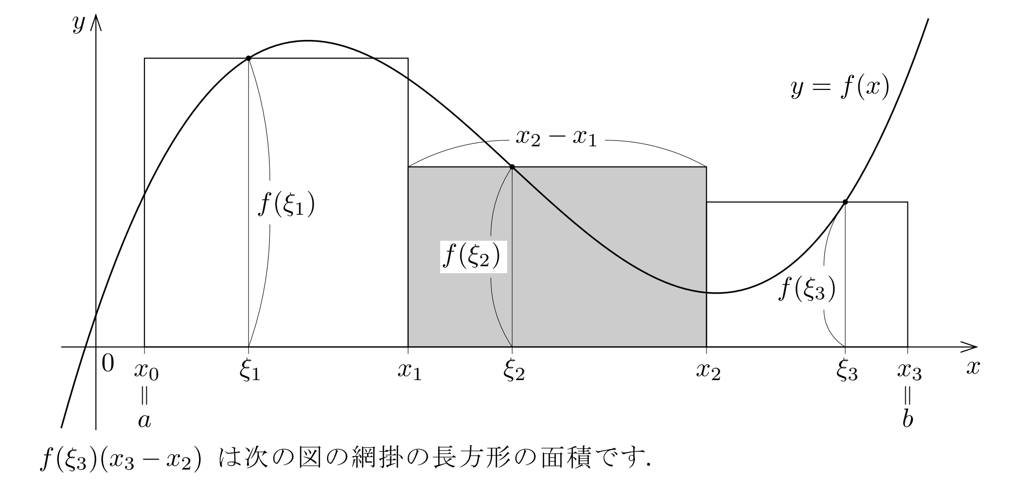
このリーマン和の各項 $f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ 及び $f(\xi_2)(x_2 - x_1)$ 及び $f(\xi_3)(x_3 - x_2)$ が $y = f(x)$ のグラフにおいて何であるか考えます． 例えば次の図のようになるとします．



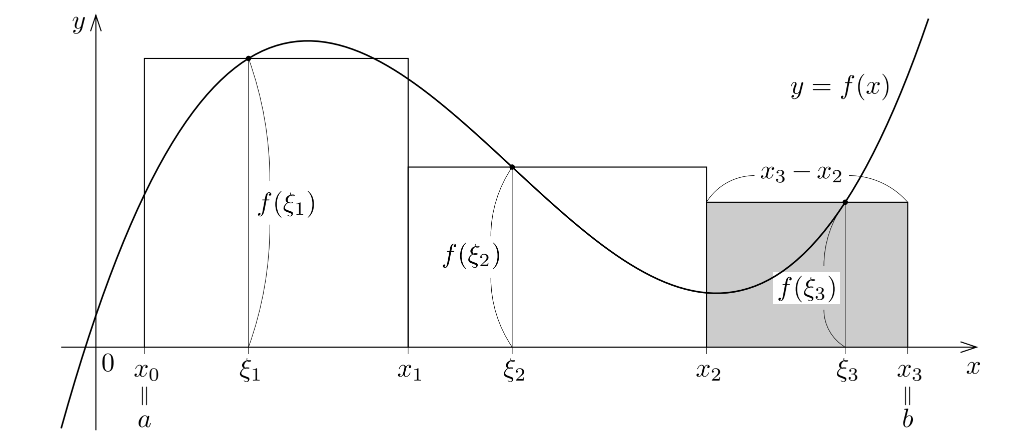
$f(\xi_1)(x_1 - x_0)$ は次の図の網掛の長方形の面積です．



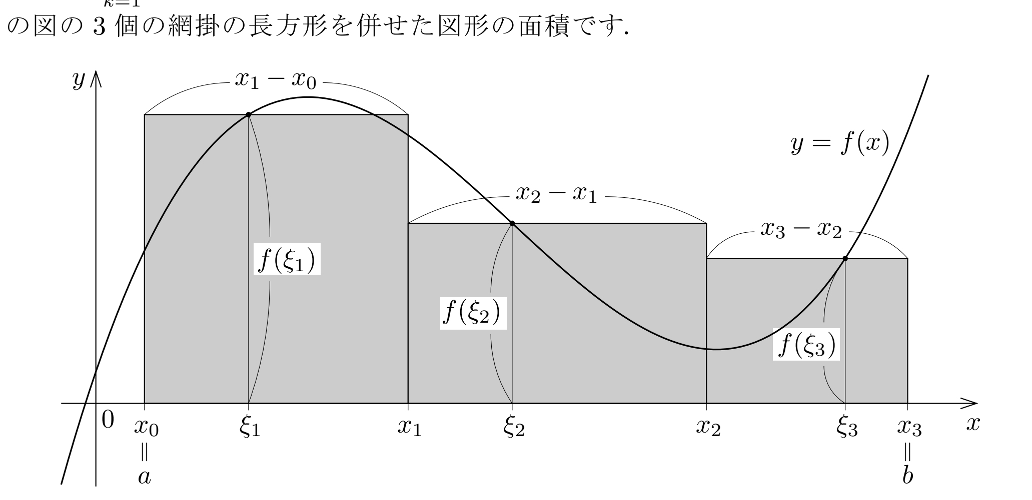
$f(\xi_2)(x_2 - x_1)$ は次の図の網掛の長方形の面積です．



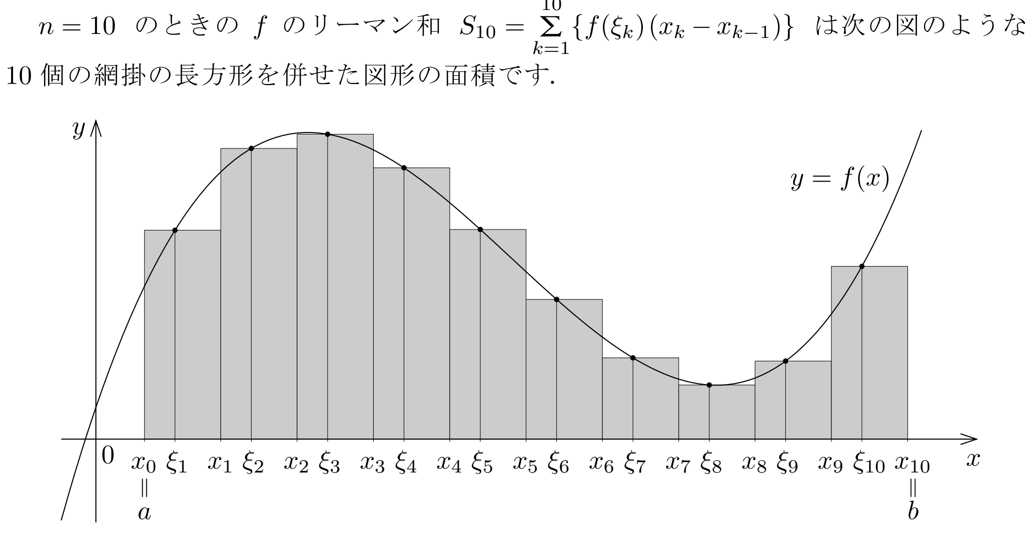
$f(\xi_3)(x_3 - x_2)$ は次の図の網掛の長方形の面積です．



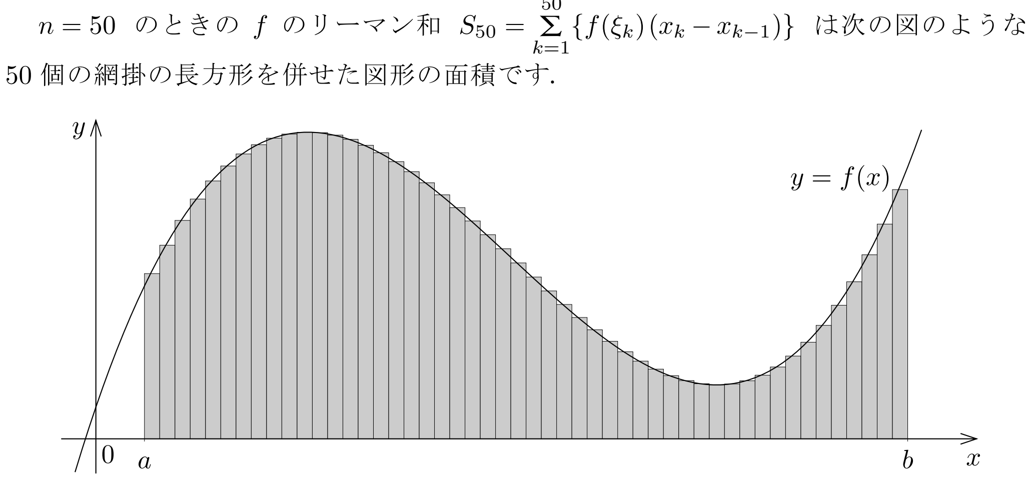
$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2)$ は次の図の 3 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



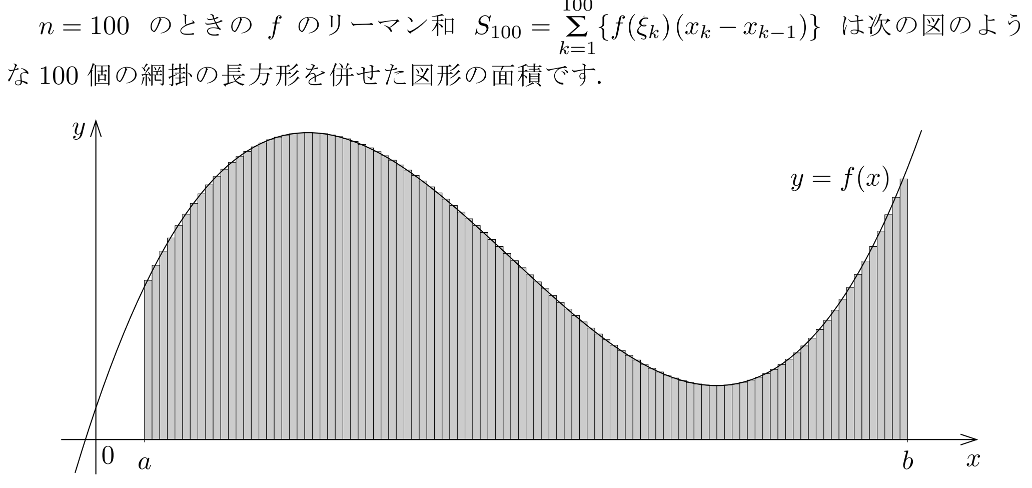
$n = 10$ のときの f のリーマン和 $S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は次の図のような 10 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



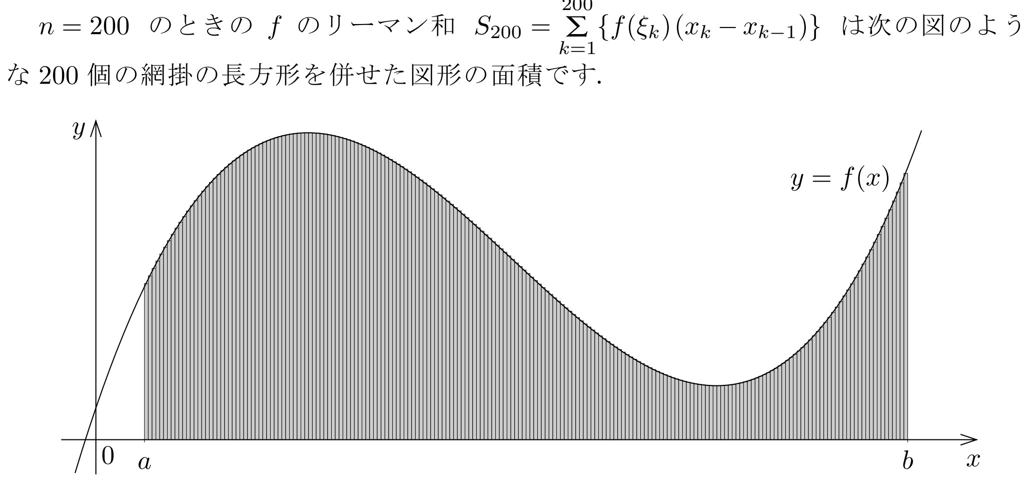
$n = 50$ のときの f のリーマン和 $S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は次の図のような 50 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



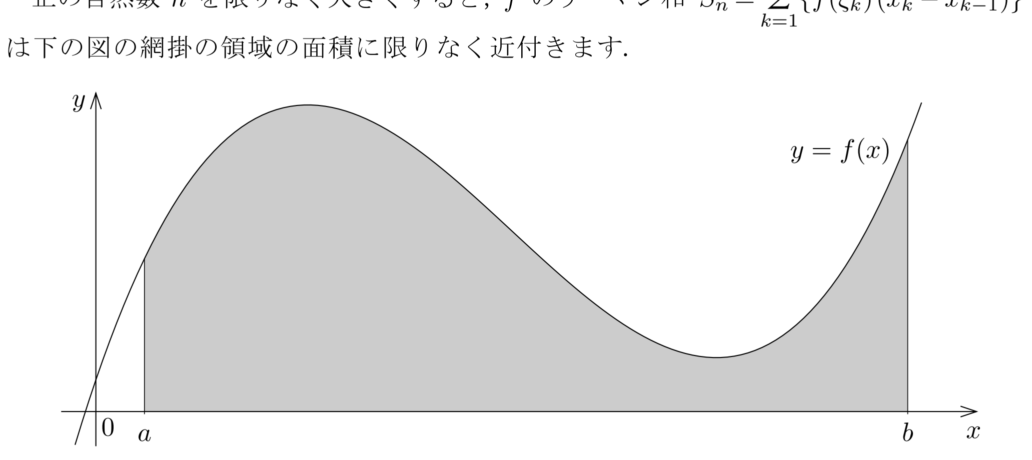
$n = 100$ のときの f のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は次の図のような 100 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



$n = 200$ のときの f のリーマン和 $S_{200} = \sum_{k=1}^{200} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は次の図のような 200 個の網掛の長方形を併せた図形の面積です．



正の自然数 n を限りなく大きくすると，f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は下の図の網掛の領域の面積に限りなく近付きます．



このように，f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は上の図の網掛の領域の面積になります．

このように考えると次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理　実数 a, b について $a \leq b$ とする． 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であり，区間 $[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とする． xy 座標平面において，$y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ である．