§6.2 定積分の図形的意味

定積分の定義に基づいて定積分の図形的意味を考えます．

実数 a と b とついて $a \leq b$ とします． 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続で，$[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とします．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり， δ_n と S_n とを次のように定めます：

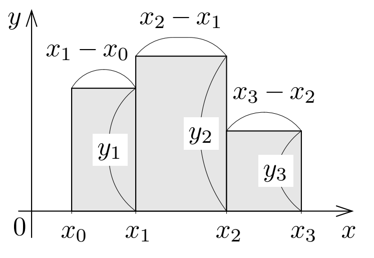
$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

S_n は f のリーマン和です．

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします． 関数 f は区間 $[a,b]$ において連続なので，定理6.1.3より，f は a から b までの定積分可能です；従って

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx .$$

まず $n = 3$ のときを考えます． xy 座標平面において，右の図の長方形の領域3個を併せた図形（網掛けの部分）の面積は

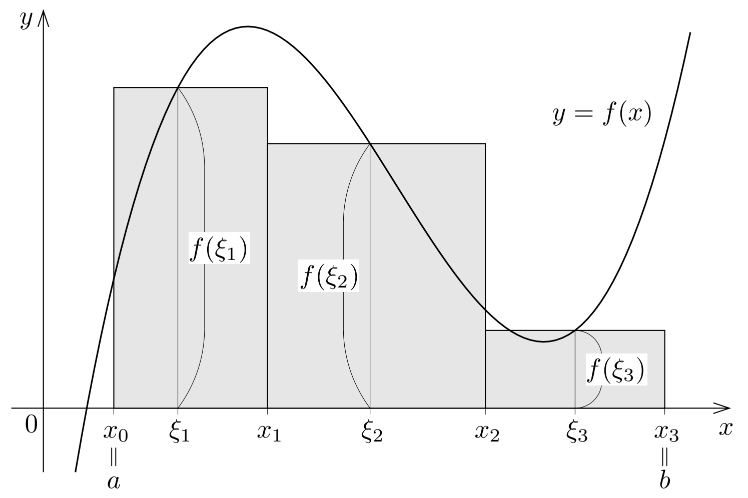


$$y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2) .$$

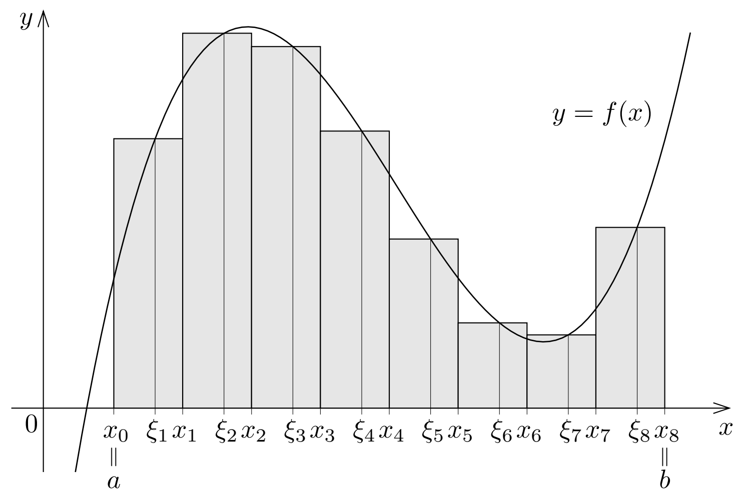
このように考えると，関数 f のリーマン和

$$S_3 = \sum_{k=1}^{3} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$
$$= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + f(\xi_3)(x_3 - x_2)$$

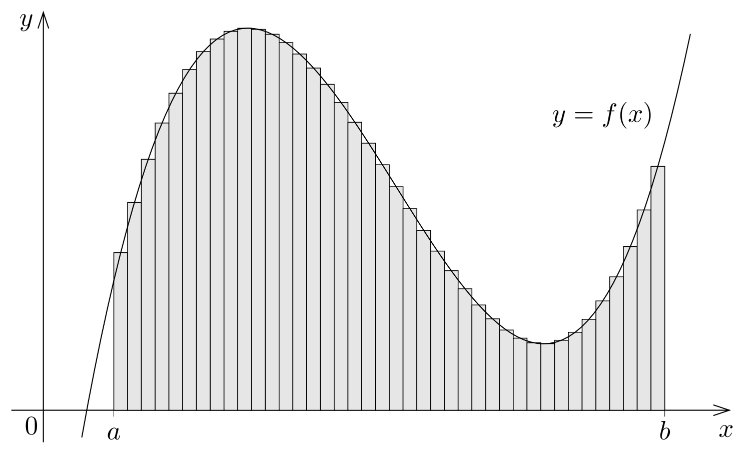
は，次の図の長方形の領域3個を併せた図形（網掛けの部分）の面積を表します．



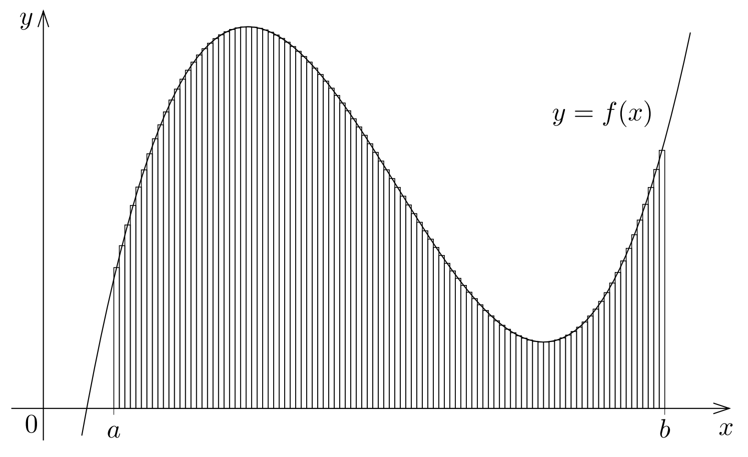
$n = 8$ のとき，関数 f のリーマン和 $S_8 = \sum_{k=1}^{8} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は，次の図の長方形の領域8個を併せた図形（網掛けの部分）の面積を表します．



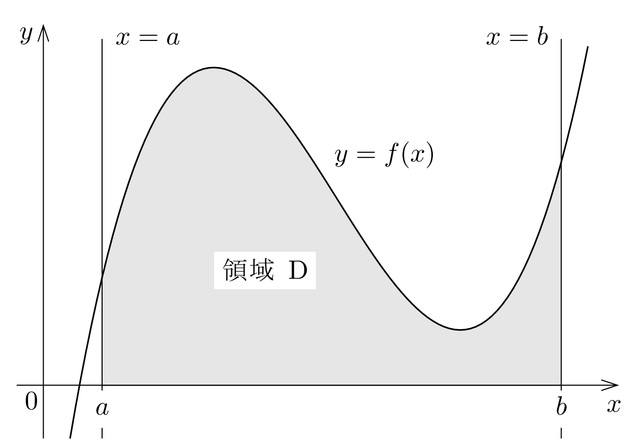
正の自然数 n に対して，関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は，このような長方形の領域 n 個を併せた図形の面積を表します． 例えば， $n = 40$ のとき，f のリーマン和 $S_{40} = \sum_{k=1}^{40} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は，次の図の細長い長方形の領域40個を併せた図形（網掛けの部分）の面積を表します．



更に， $n = 100$ のとき， f のリーマン和 $S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は，次の図の細長い長方形の領域100個を併せた図形の面積を表します．



n を限りなく大きくしていくと，細長い長方形の領域100個を併せた図形は，関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸と直線 $x = a$ と $x = b$ とで囲まれる領域 D に限りなく近づきます．



ですから， $n \to \infty$ のとき，細長い長方形の領域 n 個を併せた図形の面積 S_n は領域 D の面積に近づきそうです． つまり，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は D の面積になりそうです．$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ですから，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ は D の面積になりそうです．

実際に次の定理が成り立ちます（証明は省略します）．

定理 実数 a, b について $a \leq b$ とする．関数 f は区間 $[a,b]$ において連続であり，区間 $[a,b]$ において $f(x) \geq 0$ とする． xy 座標平面において，2直線 $x = a$ ， $x = b$ と x 軸と $y = f(x)$ のグラフとで囲まれる領域の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ．