

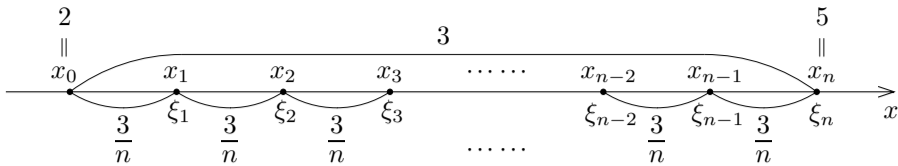
### §6.3 定義に基づく定積分の計算

リーマン和の極限值として定積分を計算してみます。

**例解** 関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  を計算します。正の各自然数  $n$  に対して、

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 5$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定めます：自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = \xi_k = 2 + \frac{3}{n}k$ 。



関数  $x^2$  は、区間  $[2, 5]$  において連続ですから、定理 6.1.3 より 2 から 5 まで積分可能です。従って、関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は関数  $x^2$  の定積分  $\int_2^5 x^2 dx$  です：

$$\int_2^5 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  を計算します。1.3 節で述べた以下の公式を用います：

$$\sum_{k=1}^n c = nc, \quad \sum_{k=1}^n k = \frac{n}{2}(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1);$$

ここで  $c$  は  $k$  と無関係な定数です。自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して

$$\xi_k = 2 + \frac{3}{n}k, \quad x_k - x_{k-1} = 2 + \frac{3}{n}k - \left\{2 + \frac{3}{n}(k-1)\right\} = \frac{3}{n};$$

これより、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \frac{3}{n} \right\} = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3}{n}k\right)^2 \\ &= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n \left(4 + \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n} \left( \sum_{k=1}^n 4 + \frac{12}{n} \sum_{k=1}^n k + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right) \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + \frac{12}{n} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{9}{n^2} \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \right\} \\ &= \frac{3}{n} \left\{ 4n + 6(n+1) + \frac{3(n+1)(2n+1)}{2} \right\} \\ &= 12 + 18 \frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \\ &= 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_2^5 x^2 dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 12 + 18 \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \right\} \\ &= 12 + 18(1+0) + \frac{9}{2}(2+0+0) \\ &= 39 . \end{aligned}$$

終

**問題 6.3.1** 関数  $x^2$  は、区間  $[1, 4]$  において連続なので、1 から 4 まで積分可能です。正の各自然数  $n$  に対して、

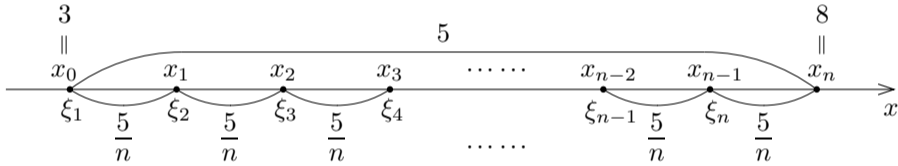
$$1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定めます：自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = \xi_k = 1 + \frac{3}{n}k$ 。関数  $x^2$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  として定積分  $\int_1^4 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を計算しなさい。

**例解** 指数関数  $2^x$  の 3 から 8 までの定積分  $\int_3^8 2^x dx$  を計算します。正の各自然数  $n$  に対して、

$$3 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 8$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定めます：自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して、 $x_k = 3 + \frac{5}{n}k$ 、 $\xi_k = x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}(k-1)$ 。



指数関数  $2^x$  は、区間  $[3, 8]$  において連続なので、3 から 8 まで積分可能です。従って、指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  は指数関数  $2^x$  の定積分  $\int_3^8 2^x dx$  です：

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n .$$

指数関数  $2^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  を計算します。等比数列の項の総和の公式を用います：第 1 項が  $a$  であり公比が  $r$  である等比数列の第 1 項から第  $n$  項までの項の総和は、 $r \neq 1$  のとき、

$$\sum_{k=1}^n (ar^{k-1}) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} .$$

自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して

$$\xi_k = 3 + \frac{5}{n}(k-1), \quad x_k - x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}k - \left\{3 + \frac{5}{n}(k-1)\right\} = \frac{5}{n};$$

これより、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \{2^{\xi_{k-1}}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \left\{ 2^{3 + \frac{5}{n}(k-1)} \frac{5}{n} \right\} \\ &= \frac{5}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ 2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)} \right\} = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{5}{n}(k-1)} = \frac{40}{n} \sum_{k=1}^n \left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} \\ &= \frac{40}{n} \frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n} \frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} \\ &= \frac{1240}{n} \frac{1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} . \end{aligned}$$

ここで変数  $x$  を  $x = 2^{\frac{5}{n}} - 1$  とおきます。  $2^{\frac{5}{n}} = 1 + x$ 、 $\frac{5}{n} = \log_2(1 + x)$ 、

$$\frac{1240}{n} = 248 \log_2(1 + x) .$$

$$S_n = 248 \log_2(1 + x) \cdot \frac{1}{x} = 248 \cdot \frac{1}{x} \log_2(1 + x) = 248 \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}} .$$

$n \rightarrow \infty$  のとき  $x = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \rightarrow 2^0 - 1 = 0$  ですから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 248 \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}} \right\} = 248 \lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}} .$$

ここで次のことを用います： $x \rightarrow 0$  のときの  $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$  の極限值が自然対数の底  $e$  である： $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ 。これより、

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log_2(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \log_2 \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right\} = \log_2 e .$$

従って、

$$\int_3^8 2^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 248 \log_2 e = \frac{248}{\ln 2} .$$

終

**問題 6.3.2** 指数関数  $3^x$  は、区間  $[2, 4]$  において連続ですから、2 から 4 まで積分可能です。正の各自然数  $n$  に対して、

$$2 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  を次のように定めます：自然数  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = 2 + \frac{2}{n}k$ 、 $\xi_k = 2 + \frac{2}{n}(k-1) = x_{k-1}$ 。

関数  $3^x$  のリーマン和  $S_n = \sum_{k=1}^n \{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  として定積分  $\int_2^4 3^x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を計算しなさい。

関数  $f$  が実数  $a$  から実数  $b$  まで積分可能であるとき、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\} .$$

しかし、逆に、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\}$  があつても、 $f$  が  $a$  から  $b$  まで積分可能でない、つまり定積分  $\int_a^b f(x) dx$  の値がないこともあります。この意味で、定積分  $\int_a^b f(x) dx$  と極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\}$  とは必ずしも一致しません。