§6.3　定義に従う定積分の計算

リーマン和の極限値として定積分を計算してみます．1.3節で述べた以下の公式を用います：

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\ ;$$

ここで c は変数 k と無関係な定数です．

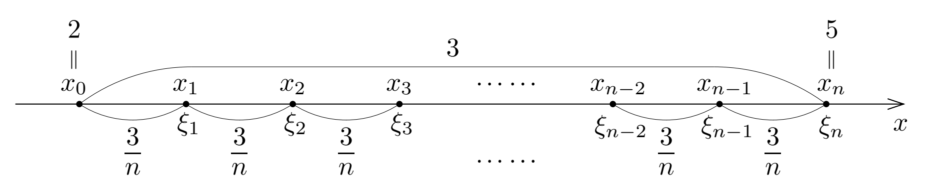
$\boxed{\text{例解}}$　関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ を計算します．正の各自然数 n に対して，

$$2 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 5$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ を考えます．関数 x^2 は，実数全体で連続ですから，定理6.1.3より 2 から 5 まで積分可能です．従って，$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば，$n \to \infty$ のとき関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_2^5 x^2dx$ に収束します：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2dx\ .$$

左辺の極限値を実際に計算するには，リーマン和 S_n を具体的に定めなければなりません．関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ をなるべく簡単な式で表すために，数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ が等差数列になるように定めます．公差を d とおくと，$x_n = x_0 + dn$ なので $d = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{5-2}{n} = \dfrac{3}{n}$ ．よって，自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ について $x_k = x_0 + dk = 2 + \dfrac{3}{n}k$ ．また，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について $\xi_k = x_k = 2 + \dfrac{3}{n}k$ と定めます．次の図のようになります．



自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{3}{n}\ ;$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{3}{n} = 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^5 x^2dx$ ．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\} = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\\
&= \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{12}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right) = \frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\
&= \frac{3}{n}\left\{4n+\frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\}\\
&= \frac{3}{n}\left\{4n+6(n+1)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\} = 12+18\frac{n+1}{n}+\frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\\
&= 12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_2^5 x^2dx &= \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left\{12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\
&= 12+18(1+0)+\frac{9}{2}(2+0+0)\\
&= 39\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.1}}$　関数 x^2 は，実数全体で連続なので，1 から 4 まで積分可能です．正の各自然数 n に対して，

$$1 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 4$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定めます：$x_0 = 1$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = \xi_k = 1 + \dfrac{3}{n}k$ ．自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{3}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{3}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束します．よって関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_1^4 x^2dx$ に収束します：$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4 x^2dx$ ．定積分 $\int_1^4 x^2dx$ を関数 x^2 のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値として計算しなさい．

等比数列の項の総和の公式を用います：第1項が a であり公比が r である等比数列の第1項から第 n 項までの項の総和は，$r \ne 1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1}) = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\ .$$

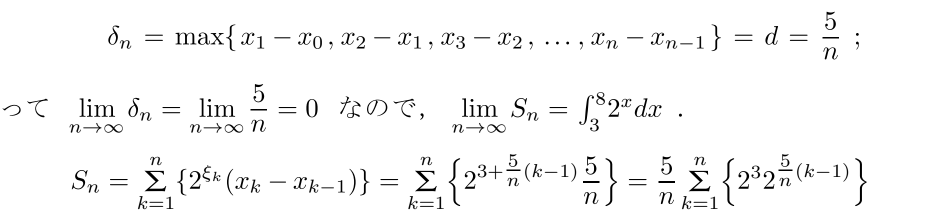
$\boxed{\text{例解}}$　指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^xdx$ を計算します．正の各自然数 n に対して，

$$3 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 8$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ を考えます．指数関数 2^x は，実数全体で連続なので，3 から 8 まで積分可能です．従って，$n \to \infty$ のとき $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ が 0 に収束するならば，$n \to \infty$ のとき指数関数 2^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は定積分 $\int_3^8 2^xdx$ に収束します：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^8 2^xdx\ .$$

リーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ をなるべく簡単な式で表すために次のように定めます：$x_0 = 3$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_k = 3 + \dfrac{5}{n}k$ ，$\xi_k = x_{k-1} = 3 + \dfrac{5}{n}(k-1)$ ．



自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = d = \dfrac{5}{n}$ なので，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = d = \frac{5}{n}\ ;$$

よって $\lim_{n\to\infty}\delta_n = \lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n} = 0$ なので，$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^8 2^xdx$ ．

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\left\{2^{3+\frac{5}{n}(k-1)}\frac{5}{n}\right\} = \frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)}\right\}\\
&= \frac{5\cdot 2^3}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{5}{n}(k-1)} = \frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1} = \frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40}{n}\frac{2^5 - 1}{2^{\frac{5}{n}} - 1}\\
&= \frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1}\ .
\end{aligned}$$

ここで変数 t を $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1$ とおきます．$2^{\frac{5}{n}} = 1 + t$ ，両辺の自然対数を考えて $\ln 2^{\frac{5}{n}} = \ln(1+t)$ ，$\dfrac{5}{n}\ln 2 = \ln(1+t)$ ，$\dfrac{1}{n} = \dfrac{\ln(1+t)}{5\ln 2}$ なので，

$$\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}} - 1} = \frac{40\ln(1+t)}{5\ln 2}\cdot\frac{31}{t} = \frac{248}{\ln 2}\frac{1}{t}\ln(1+t) = \frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\ .$$

よって $S_n = \dfrac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$ ．$n \to \infty$ のとき $t = 2^{\frac{5}{n}} - 1 \to 2^0 - 1 = 0$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}\ .$$

2.9節で述べたように，$t \to 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は自然対数の底 e に収束します：$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ ．対数関数 $\ln x$ は連続なので，

$$\lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln\left\{\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ln e = \frac{248}{\ln 2}\ .$$

故に，

$$\int_3^8 2^xdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{t\to 0}\left\{\frac{248}{\ln 2}\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\} = \frac{248}{\ln 2}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.3.2}}$　指数関数 3^x は，実数全体連続ですから，2 から 4 まで積分可能です．正の各自然数 n に対して，

$$2 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 4$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ を次のように定めます：$x_0 = 2$ ，自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = 2 + \dfrac{2}{n}k$ ，$\xi_k = 2 + \dfrac{2}{n}(k-1) = x_{k-1}$ ．自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k - x_{k-1} = \dfrac{2}{n}$ なので，

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{2}{n}\ ;$$

これは $n \to \infty$ のとき 0 に収束します．よって関数 3^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_2^4 3^xdx$ に収束します：$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_2^4 3^xdx$ ．定積分 $\int_2^4 3^xdx$ を関数 3^x のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k - x_{k-1})\}$ の極限値として計算しなさい．