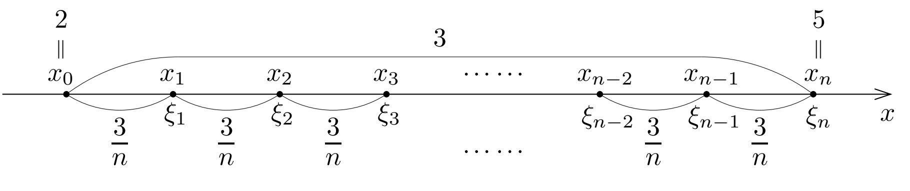
§6.3　定義に基づく定積分の計算

リーマン和の極限値として定積分を計算してみます．

例解　関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ を計算します．正の各自然数 n に対して，

$$2=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=5$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定めます：自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k=\xi_k=2+\dfrac{3}{n}k$ ．



関数 x^2 は，区間 $[2,5]$ において連続ですから，定理6.1.3より 2 から 5 まで積分可能です．従って，関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ は関数 x^2 の定積分 $\int_2^5 x^2dx$ です：

$$\int_2^5 x^2dx=\lim_{n\to\infty}S_n\ .$$

関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ を計算します．1.3節で述べた以下の公式を用います：

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n}{2}(n+1)\ ,\qquad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\ ;$$

ここで c は k と無関係な定数です．自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して

$$\xi_k=2+\frac{3}{n}k\ ,\qquad x_k-x_{k-1}=2+\frac{3}{n}k-\left\{2+\frac{3}{n}(k-1)\right\}=\frac{3}{n}\ ;$$

これより，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\frac{3}{n}\right\}=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{3}{n}k\right)^2\\&=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(4+\frac{12}{n}k+\frac{9}{n^2}k^2\right)=\frac{3}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}4+\frac{12}{n}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+\frac{12}{n}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{9}{n^2}\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right\}\\&=\frac{3}{n}\left\{4n+6(n+1)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)(2n+1)}{n}\right\}\\&=12+18\frac{n+1}{n}+\frac{9}{2}\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\\&=12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_2^5 x^2dx&=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{12+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{9}{2}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\&=12+18(1+0)+\frac{9}{2}(2+0+0)\\&=39\ .\end{aligned}$$

終

問題 6.4.1　関数 x^2 は，区間 $[1,4]$ において連続なので，1 から 4 まで積分可能です．正の各自然数 n に対して，

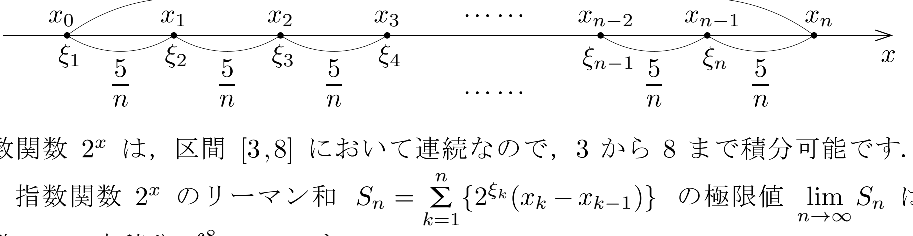
$$1=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=4$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定めます：自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k=\xi_k=1+\dfrac{3}{n}k$ ．関数 x^2 のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{(\xi_k)^2(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ として定積分 $\int_1^4 x^2dx=\lim_{n\to\infty}S_n$ を計算しなさい．

例解　指数関数 2^x の 3 から 8 までの定積分 $\int_3^8 2^xdx$ を計算します．正の各自然数 n に対して，

$$3=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\le\xi_n\le x_n=8$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定めます：自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，$x_k=3+\dfrac{5}{n}k$ ，$\xi_k=x_{k-1}=3+\dfrac{5}{n}(k-1)$ ．



指数関数 2^x は，区間 $[3,8]$ において連続なので，3 から 8 まで積分可能です．従って，指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ は指数関数 2^x の定積分 $\int_3^8 2^xdx$ です：

$$\int_3^8 2^xdx=\lim_{n\to\infty}S_n\ .$$

指数関数 2^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ を計算します．等比数列の項の総和の公式を用います：第 1 項が a であり公比が r である等比数列の第 1 項から第 n 項までの項の総和は，$r\ne1$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n}(ar^{k-1})=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\ .$$

自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して

$$\xi_k=3+\frac{5}{n}(k-1)\ ,\qquad x_k-x_{k-1}=3+\frac{5}{n}k-\left\{3+\frac{5}{n}(k-1)\right\}=\frac{5}{n}\ ;$$

これより，

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\{2^{\xi_{k-1}}(x_k-x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^{n}\left\{2^{3+\frac{5}{n}(k-1)}\frac{5}{n}\right\}\\&=\frac{5}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2^3 2^{\frac{5}{n}(k-1)}\right\}=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{5}{n}(k-1)}=\frac{40}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^{k-1}\\&=\frac{40}{n}\frac{\left(2^{\frac{5}{n}}\right)^n-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{2^5-1}{2^{\frac{5}{n}}-1}=\frac{40}{n}\frac{31}{2^{\frac{5}{n}}-1}\\&=\frac{1240}{n}\frac{1}{2^{\frac{5}{n}}-1}\ .\end{aligned}$$

ここで変数 x を $x=2^{\frac{5}{n}}-1$ とおきます．$2^{\frac{5}{n}}=1+x$ ，$\dfrac{5}{n}=\log_2(1+x)$ ，$\dfrac{1240}{n}=248\log_2(1+x)$ ．

$$S_n=248\log_2(1+x)\cdot\frac{1}{x}=248\cdot\frac{1}{x}\log_2(1+x)=248\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}\ .$$

$n\to\infty$ のとき $x=2^{\frac{5}{n}}-1\to2^0-1=0$ ですから，

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{x\to0}\left\{248\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=248\lim_{x\to0}\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}\ .$$

ここで次のことを用います：$x\to0$ のときの $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ の極限値が自然対数の底 e である：$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ ．これより，

$$\lim_{x\to0}\log_2(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_2\left\{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right\}=\log_2e\ .$$

従って，

$$\int_3^8 2^xdx=\lim_{n\to\infty}S_n=248\log_2e=\frac{248}{\ln2}\ .$$

終

問題 6.3.2　指数関数 3^x は，区間 $[2,4]$ において連続ですから，2 から 4 まで積分可能です．正の各自然数 n に対して，

$$2=x_0\le\xi_1\le x_1\le\xi_2\le x_2\le\xi_3\le x_3\le\cdots\le x_{n-1}\xi_n\le x_n=4$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ 及び実数 $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots,\xi_n$ を次のように定めます：自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ に対して $x_k=2+\dfrac{2}{n}k$ ，$\xi_k=2+\dfrac{2}{n}(k-1)=x_{k-1}$ ．関数 3^x のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\{3^{\xi_k}(x_k-x_{k-1})\}$ の極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ として定積分 $\int_2^4 3^xdx=\lim_{n\to\infty}S_n$ を計算しなさい．

関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}\ .$$

しかし，逆に，極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right\}$ があっても，f が a から b まで積分可能でない，つまり定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ の値がないこともあります．この意味で，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ と極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\dfrac{b-a}{n}k\right)\right\}$ とは必ずしも一致しません．