§6.4 微分積分の基本定理

微分積分の基本定理は，その名前のとおり，微分積分の最も基本となる定理です．その証明は後にします．

定理（微分積分の基本定理）　関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする． a,b が属するある区間において，関数 F が微分可能で $F'(x)=f(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\ .$$

前節において定積分 $\int_2^5 x^2dx$ 及び $\int_1^4 2^x dx$ をリーマン和の極限値として計算しましたが，その計算はかなり面倒でした．しかし，微分積分の基本定理を用いると以下のように簡単に計算できます．

$\boxed{例}$　定積分 $\int_2^5 x^2dx$ を計算します．関数 F を $F(x)=\frac{1}{3}x^3$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{3}x^3\Big)=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2\ ;$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_2^5 x^2dx=F(5)-F(2)=\frac{1}{3}5^3-\frac{1}{3}2^3=\frac{125-8}{3}=\frac{117}{3}=39\ .$$ $\boxed{終}$

$\boxed{例}$　定積分 $\int_1^4 2^x dx$ を計算します．関数 F を $F(x)=\frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\frac{2^x}{\ln 2}=\frac{2^x\ln 2}{\ln 2}=2^x\ ;$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_1^4 2^x dx=F(4)-F(1)=\frac{2^4}{\ln 2}-\frac{2^1}{\ln 2}=\frac{16-2}{\ln 2}=\frac{14}{\ln 2}\ .$$ $\boxed{終}$

関数の定積分をリーマン和の極限値として計算することはほとんどの場合とても面倒です．ところが，微分積分の基本定理によると，様々な関数の定積分がある程度統一的に計算できます．

$\boxed{例題}$　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ を用いて，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ を計算する．

余弦関数 $\cos x$ は，区間 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ において連続なので，0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である． $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ なので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1\ .$$ $\boxed{終}$

$\boxed{問題 6.4.1}$　$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$ となることを用いて，定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin x\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{例題}$　微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1<x<1$ ） を用いて，定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を計算する．

関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は，区間 $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ において連続なので，$\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能である． $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1<x<1$ ） なので，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}\ .$$ $\boxed{終}$

$\boxed{問題 6.4.2}$　微分公式 $\frac{d}{dx}\ln x=\frac{1}{x}$ （ $x>0$ ） を用いて，定積分 $\int_1^e\frac{1}{x}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{問題 6.4.3}$　微分公式 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x=\frac{1}{1+x^2}$ を用いて，定積分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ を計算しなさい．

関数 F は実数 a が属す区間 I において微分可能とします．更に，I の各実数 x に対して，F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとします．微分積分の基本定理より $\int_a^x F'(t)\,dt=F(x)-F(a)$ なので，

$$F(x)=\int_a^x F'(t)\,dt+F(a)\ .$$

つまり，関数 F の導関数 F' を定積分すると，元の関数 F の値を求めることができます．この意味で，積分は微分の逆の操作になります．

微分積分の基本定理を証明するために5.2節で述べた平均値の定理を用います．

平均値の定理　実数 p と q とについて $p<q$ で，関数 F が区間 $[p,q]$ で微分可能であるならば，次のような実数 ζ がある： $F(q)-F(p)=F'(\zeta)(q-p)$ ， $p<\zeta<q$ ．

微分積分の基本定理を証明します．実数 a と b とについて $a<b$ のときを考えます．関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとします．更に，区間 $[a,b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x)=f(x)$ と仮定します．等式 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ を導きます．

正の自然数 n に対して，

$$a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},x_n$ をとり，δ_n を次のように定めます：

$$\delta_n=\max\{x_1-x_0,x_2-x_1,x_3-x_2,\ldots,x_n-x_{n-1}\}\ .$$

$x_{k-1}<x_k$ （ $k=1,2,3,\ldots,n$ ） で，f は区間 $[x_{k-1},x_k]$ で微分可能なので，4.2節で述べた平均値の定理より次のような実数 ξ_k があります：

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\ ,\qquad x_{k-1}<\xi_k<x_k\ .$$

実数 ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので，仮定より $F'(\xi_k)=f(\xi_k)$ ，従って

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\ .$$

よって

$$\sum_{k=1}^n\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

$x_n=b$ ， $x_0=a$ ですから，この等式の左辺は，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}\\&=F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+F(x_3)-F(x_2)+F(x_4)-F(x_3)+\cdots\\&\qquad+F(x_{n-2})-F(x_{n-3})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+F(x_n)-F(x_{n-1})\\&=-F(x_0)+F(x_n)=F(x_n)-F(x_0)\\&=F(b)-F(a)\ ,\end{aligned}$$

つまり

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}\ .$$

従って，関数 f のリーマン和 $S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$ は，

$$S_n=\sum_{k=1}^n\{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}=F(b)-F(a)\ .$$

$\lim_{n\to\infty}\delta_n=0$ とします．関数 f は a から b まで積分可能ですから，f のリーマン和 S_n の極限値は f の定積分です： $\lim_{n\to\infty}S_n=\int_a^b f(x)\,dx$ ． $S_n=F(b)-F(a)$ なので，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{F(b)-F(a)\}=F(b)-F(a)\ .$$

こうして微分積分の基本定理（の主要部分）が証明されました．