

§6.4 微分積分の基本定理

微分積分の基本定理は、その名前のとおり、微分積分の最も基本となる定理です。その証明は後にします。

定理 (微分積分の基本定理) 関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする。 a, b が属する区間において、関数 F が微分可能で $F'(x) = f(x)$ ならば、

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) .$$

前節において定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ 及び $\int_1^4 2^x dx$ をリーマン和の極限值として計算しましたが、その計算はかなり面倒でした。しかし、微分積分の基本定理を用いると以下のように簡単に計算できます。

例 定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を計算します。関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおくと、

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 \right) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 ;$$

従って、微分積分の基本定理より、

$$\int_2^5 x^2 dx = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}5^3 - \frac{1}{3}2^3 = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3} = 39 . \quad \text{終}$$

例 定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を計算します。関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおくと、

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x ;$$

従って、微分積分の基本定理より、

$$\int_1^4 2^x dx = F(4) - F(1) = \frac{2^4}{\ln 2} - \frac{2^1}{\ln 2} = \frac{16-2}{\ln 2} = \frac{14}{\ln 2} . \quad \text{終}$$

様々な関数について、定義（あるいは直ぐに導かれる定理6.3）に従って定積分を計算することはとても面倒です。ところが、微分積分の基本定理によると、様々な関数の定積分がある程度統一的に計算できます。

例題 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ を用いて、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ を計算する。

余弦関数 $\cos x$ は、区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において連続なので、0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である。 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ なので、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 . \quad \text{終}$$

問題 6.4.1 $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ となることを用いて、定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$ を計算しなさい。

例題 微分公式 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) を用いて、定積分

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ を計算する。

関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は、区間 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ において連続なので、 $\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能である。 $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) なので、

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} . \quad \text{終}$$

問題 6.4.2 微分公式 $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) を用いて、定積分 $\int_1^e \frac{1}{x} dx$ を計算しなさい。

問題 6.4.3 微分公式 $\frac{d}{dx} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて、定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$ を計算しなさい。

関数 F は実数 a が属する区間 I において微分可能とします。更に、 I の各実数 x に対して、 F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとします。微分積分の基本定理より $\int_a^x F'(t) dt = F(x) - F(a)$ なので、

$$F(x) = \int_a^x F'(t) dt + F(a) .$$

つまり、関数 F の導関数 F' を定積分すると、元の関数 F の値を求めることができます。この意味で、積分は微分の逆の操作になります。

微分積分の基本定理を証明するために5.2節で述べた平均値の定理を用います。

平均値の定理 実数 p と q について $p < q$ で、関数 F が区間 $[p, q]$ で微分可能であるならば、次のような実数 ζ がある： $F(q) - F(p) = F'(\zeta)(q - p)$, $p < \zeta < q$.

微分積分の基本定理を証明します。実数 a と b について $a < b$ のときを考えます。関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとします。更に、区間 $[a, b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x) = f(x)$ と仮定します。等式 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ を導きます。

正の自然数 n に対して、

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、 δ_n を次のように定めます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$x_{k-1} < x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) で、 f は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので、4.2節で述べた平均値の定理より次のような実数 ξ_k があります：

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) , \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

実数 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので、仮定より $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$, 従って

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$x_n = b$, $x_0 = a$ ですから、この等式の左辺は、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\ &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\ & \quad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\ &= F(b) - F(a) , \end{aligned}$$

つまり

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

従って、関数 f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は、

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = F(b) - F(a) .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とします。関数 f は a から b まで積分可能ですから、 f のリーマン和 S_n の極限值は f の定積分です： $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. $S_n = F(b) - F(a)$ なので、

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a) .$$

こうして微分積分の基本定理（の主要部分）が証明されました。