§6.4 微分積分の基本定理

次に述べる微分積分の基本定理[7]は，その名前のとおり，微分積分の最も基本となる定理です．その証明は後にします．

定理（微分積分の基本定理）　関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．a, b が属するある区間において，関数 F が微分可能で $F'(x) = f(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) .$$

6.1節で述べたように，定積分はリーマン和の極限値として定義されます．前節において定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ 及び $\int_3^8 2^x dx$ を定義に直接従ってリーマン和の極限値として計算しましたが，その計算はかなり面倒でした．しかし，微分積分の基本定理を用いると以下のように簡単に計算できます．

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_2^5 x^2 dx$ を計算します．関数 F を $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ とおきます．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 = x^2 .$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_2^5 x^2 dx = F(5) - F(2) = \frac{1}{3}5^3 - \frac{1}{3}2^3 = \frac{125-8}{3} = \frac{117}{3} = 39 .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$ 定積分 $\int_3^8 2^x dx$ を計算します．関数 F を $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$ とおきます．

$$F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\frac{2^x}{\ln 2} = \frac{2^x \ln 2}{\ln 2} = 2^x .$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\int_3^8 2^x dx = F(8) - F(3) = \frac{2^8}{\ln 2} - \frac{2^3}{\ln 2} = \frac{256-8}{\ln 2} = \frac{248}{\ln 2} .$$

$\boxed{\text{終}}$

関数の定積分をリーマン和の極限値として計算することは，ほとんどの場合とても面倒です．ところが，微分積分の基本定理によると，様々な関数の定積分がある程度統一的に計算できます．

$\boxed{\text{例題}}$ 微分公式 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ を用いて，定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ を計算する．

余弦関数 $\cos x$ は，区間 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ において連続なので，0 から $\frac{\pi}{2}$ まで積分可能である．$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ なので，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.1}}$ $\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$ となることを用いて，定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 微分公式 $\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1 < x < 1$ ）を用いて，定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ を計算する．

関数 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ は，区間 $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ において連続なので，$\frac{1}{2}$ から $\frac{\sqrt{3}}{2}$ まで積分可能である．$\frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ （ $-1 < x < 1$ ）なので，

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.4.2}}$ 微分公式 $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ （ $x > 0$ ）を用いて，定積分 $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{問題 6.4.3}}$ 微分公式 $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$ を用いて，定積分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ を計算しなさい．

関数 F は実数 a が属する区間 I において微分可能とします．更に，I の各実数 x に対して，F の導関数 F' は a から x まで積分可能であるとします．微分積分の基本定理より $\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$ なので，

$$F(x) = \int_a^x F'(t)\,dt + F(a) .$$

つまり，関数 F の導関数 F' を定積分すると，元の関数 F の値を求めることができます．この意味で，積分は微分の逆の操作になります．

微分積分の基本定理を証明します．5.2節で述べた平均値の定理を用います．

> 平均値の定理　実数 p と q とについて $p < q$ で，関数 F が区間 $[p, q]$ において微分可能であるならば，次のような実数 r がある：
>
> $$F(q) - F(p) = F'(r)(q-p) \quad \text{かつ} \quad p < r < q .$$

実数 a と b とについて $a < b$ のときを考えます．関数 f が実数 a から実数 b まで定積分可能であるとします．更に，区間 $[a, b]$ において関数 F は微分可能で $F'(x) = f(x)$ と仮定します．等式 $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ を導きます．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとり，δ_n を次のように定めます：

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします．

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，$x_{k-1} < x_k$ で，f は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので，平均値の定理より次のような実数 ξ_k があります：

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \quad \text{かつ} \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k .$$

実数 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので，仮定より $F'(\xi_k) = f(\xi_k)$ ，従って

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}\{F(x_k) - F(x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} .$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ とおきます．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{F(x_k) - F(x_{k-1})\} .$$

$a = x_0 < \xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \xi_3 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < \xi_n < x_n = b$ なので，$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は f のリーマン和です．また，$x_n = b$ かつ $x_0 = a$ なので，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\{F(x_k) - F(x_{k-1})\} \\
&= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + F(x_4) - F(x_3) + \cdots \\
&\qquad + F(x_{n-2}) - F(x_{n-3}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\
&= -F(x_0) + F(x_n) = F(x_n) - F(x_0) \\
&= F(b) - F(a) ,
\end{aligned}$$

よって，f のリーマン和 S_n について，

$$S_n = F(b) - F(a) .$$

関数 f は a から b まで定積分可能ですから，f のリーマン和 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$ は $n \to \infty$ のとき f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束します：$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ．故に，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\{F(b) - F(a)\} = F(b) - F(a) .$$

こうして微分積分の基本定理（の主要部分）が証明されました．

---

[7] ニュートン・ライプニッツの定理ともいわれます．ニュートンは17世紀のイギリスの物理学者・数学者です．ライプニッツは17世紀ドイツの哲学者・数学者です．