§6.5 原始関数と不定積分

関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとします．a,b が属するある区間において $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となる関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ですから，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が計算できます．そこで，関数 f に対して $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となる関数 F を見つけることが重要になります．

関数 f と F とについて，$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となるとき，F は f の**原始関数** (primitive function) であるといいます．つまり，関数 f と F とについて，

$$\begin{aligned} F \text{ は } f \text{ の原始関数である} &\iff \frac{d}{dx}F(x)=f(x) \\ &\iff f \text{ は } F \text{ の導関数である} \quad . \end{aligned}$$

このように，原始関数というのは導関数と逆の概念です．

例えば，$\frac{d}{dx}x^3=3x^2$ ですから，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数です．ところが，$\frac{d}{dx}(x^3+2)=3x^2$ ，$\frac{d}{dx}\left(x^3-\frac{7}{5}\right)=3x^2$ ですから，関数 x^3+2，$x^3-\frac{7}{5}$ などもやはり関数 $3x^2$ の原始関数です．任意の定数 C に対して，$\frac{d}{dx}(x^3+C)=3x^2$ ですから，関数 x^3+C は関数 $3x^2$ の原始関数です．逆に，$3x^2$ の原始関数は x^3+C （C は定数）となるものに限ります．

一般的に次の定理が成り立ちます（証明は後にします）．

定理 6.5.1　同じ区間を定義域とする関数 f と F と G とについて，
F と G とが共に f の原始関数である ならば $G(x)=F(x)+C$ （C は定数）．

$\boxed{\text{例題}}$　関数 $\frac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である：$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=x^3$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2)=7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．

関数 $\frac{1}{4}x^4$ と関数 $F(x)$ とは共に関数 x^3 の原始関数なので，$F(x)=\frac{1}{4}x^4+C$ （C は定数）．$F(2)=7$ なので，$\frac{1}{4}\cdot 2^4+C=7$ ，$C=3$ ．故に $F(x)=\frac{1}{4}x^4+3$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.5.1}}$　正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数です：$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数であり $F\left(\frac{3}{2}\pi\right)=4$ とします；このような関数 $F(x)$ を求めなさい．

関数 f の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の**不定積分** (indefinite integral) といいます．$f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を積分する (integrate) といい，積分される関数 $f(x)$ を被積分関数といいます．

例えば，関数 x^2 の原始関数は $\frac{1}{3}x^3$，$\frac{1}{3}x^3+5$，$\frac{1}{3}x^3-\sqrt{7}$ など数多くありますが，そのうちのどれか一つを $\int x^2dx$ と書き表します[6]．関数 $\frac{1}{3}x^3$ も関数 $\int x^2dx$ も関数 x^2 の原始関数なので，定理 6.5.1 より，

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3+C \quad （C \text{ は定数}）．$$

一般に，同じ区間を定義域とする関数 f と F とについて，F が f の原始関数であるとき，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 6.5.1 より，

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad （C \text{ は定数}）．$$

ここで現われる定数 C を**積分定数**といいます．

以下の 2 つの定理が微分と不定積分との関係の基本になります．

定理 6.5.2　関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\} = f(x) \ .$$

証明　関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数なので，$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$ ．（証明終り）

定理 6.5.3　関数 F が微分可能である区間において，

$$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）．$$

証明　関数 F が区間 I において微分可能であるとする．F の導関数を f とおく：$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ ．F は f の原始関数である．関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，区間 I において，定理 6.5.1 より

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C \quad （C \text{ は積分定数}）．$$

$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ なので，$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （C は積分定数）．

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$　次のことを示す：関数 x^3 に対して $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$ （C は積分定数）．

〔方針〕 関数 F を $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ とおいて，公式 $\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （C は積分定数） に当てはめる．そのために $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ を計算する．

〔解答〕

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}4x^3 = x^3 \ .$$

よって，$x^3=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ なので，

$$\int x^3dx=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right\}dx=\frac{1}{4}x^4+C \quad （C \text{ は積分定数}）．$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.5.2}}$　次のことを示しなさい: 関数 $\frac{1}{x^3}$（$x>0$）に対して $\int\frac{1}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2x^2}+C$ （C は積分定数）．

$\boxed{\text{問題 6.5.3}}$　次のことを示しなさい: 関数 $\sqrt{x}$（$x\geq 0$）に対して $\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3}+C$ （C は積分定数）．

関数の不定積分はあるとは限りません．不定積分の存在について次の定理が成り立ちます．

定理 6.5.4　定義域が区間である関数 f が連続であれば，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．

——— 定理 6.5.1 の証明

まず 5.2 節で述べた平均値の定理を再述します．

> 平均値の定理　実数 a と b とについて $a<b$ で，関数 f が区間 $[a,b]$ において微分可能であるならば，次のような実数 c がある：
> $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ，$a<c<b$ ．

平均値の定理を用いると次の補助定理が証明されます．区間 I において関数 f が微分可能であるとは，I の各実数において f が微分可能であることでした．

補助定理　区間 I を定義域とする関数 f について，I において $f'(x)=0$ ならば，関数 f は定数関数である．

証明　区間 I において $f'(x)=0$ と仮定する．a,b は I に属す任意の実数とする．

$a<b$ とする．f は I で微分可能なので，f は区間 $[a,b]$ で微分可能である．従って平均値の定理より次のような実数 c がある：

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a) \ , \qquad a<c<b \ .$$

$a<c<b$ より実数 c は区間 I に属すので，仮定より $f'(c)=0$ ；よって $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)=0$ なので，$f(a)=f(b)$ ．

同様に $a>b$ のときも $f(a)=f(b)$ ．（証明終り）

この補助定理を用いて定理 6.5.1 を証明します．関数 f と F と G との定義域は同じ区間であるとします．次のことを示します：

$$F,G \text{ が } f \text{ の原始関数であるならば } G(x)=F(x)+C \quad （C \text{ は定数}）．$$

まず，G が f の原始関数であると仮定します．区間 I を定義域とする関数 H を次のように定義します：

$$H(x) = G(x)-F(x) \ .$$

F も G も f の原始関数ですから，$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ，$\frac{d}{dx}G(x)=f(x)$ ；よって，I において

$$\frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}\{G(x)-F(x)\} = \frac{d}{dx}G(x)-\frac{d}{dx}F(x) = f(x)-f(x) = 0 \ .$$

従って，前述の補助定理より関数 H は定数関数ですから，ある定数 C をとると，I において $H(x)=C$ ；$H(x)=G(x)-H(x)$ なので，I において $G(x)-H(x)=C$ つまり $G(x)=H(x)+C$ ．

---

[6] x^2 の不定積分 $\int x^2dx$ が関数 x^2 の原始関数のうちのどれであるかは決めません．$\int x^2dx$ は $\frac{1}{3}x^3+\frac{28}{3}$ かもしれませんし，$\frac{1}{3}x^3-8$ かもしれません．