§6.5　原始関数と不定積分

関数 f は実数 a から実数 b まで積分可能であるとします．a,b が属するある区間において $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となる関数 F が見つかれば，微分積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ですから，定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が計算できます．そこで，関数 f の定積分を計算するために，$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となる関数 F を見つけることが重要になります．

関数 f と F とについて，$\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$ となるとき，F は f の**原始関数** (primitive function) であるといいます．つまり，関数 f と F とについて，

$$F \text{ は } f \text{ の原始関数である} \iff \frac{d}{dx}F(x)=f(x)$$
$$\iff f \text{ は } F \text{ の導関数である}\quad .$$

このように，原始関数というのは導関数と逆の概念です．

$\boxed{\text{例}}$ $\frac{d}{dx}x^3=3x^2$ ですから，関数 x^3 は関数 $3x^2$ の原始関数です．$\frac{d}{dx}(x^3+2)=3x^2$，$\frac{d}{dx}\left(x^3-\frac{7}{5}\right)=3x^2$ ですから，関数 x^3+2，$x^3-\frac{7}{5}$ などもやはり関数 $3x^2$ の原始関数です．任意の定数 C に対して，$\frac{d}{dx}(x^3+C)=3x^2$ ですから，関数 x^3+C は関数 $3x^2$ の原始関数です．逆に，$3x^2$ の原始関数は x^3+C （C は定数）となるものに限ります．$\boxed{\text{終}}$

一般的に次の定理が成り立ちます（証明は後にします）．

定理 6.5.1　同じ区間を定義域とする関数 f,F,G について，F が f の原始関数であるとき，

$$G \text{ が } f \text{ の原始関数である} \iff \text{ある定数 } C \text{ をとると } G(x)=F(x)+C\quad .$$

$\boxed{\text{例題}}$ 関数 $\frac{1}{4}x^4$ は関数 x^3 の原始関数である：$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=x^3$．実数全体を定義域とする関数 $F(x)$ は関数 x^3 の原始関数であり $F(2)=7$ とする；このような関数 $F(x)$ を求める．

関数 $\frac{1}{4}x^4$ と関数 $F(x)$ とは共に関数 x^3 の原始関数なので，$F(x)=\frac{1}{4}x^4+C$ （C は定数）．$F(2)=7$ なので，$\frac{1}{4}\cdot 2^4+C=7$，$C=3$．故に $F(x)=\frac{1}{4}x^4+3$．$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.5.1}}$　正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数です：$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$．実数全体を定義域とする次のような関数 $F(x)$ を求めなさい：$F(x)$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数であり $F\left(\frac{3\pi}{2}\right)=4$．

関数 f の原始関数のうちのどれか一つを

$$\int f(x)\,dx$$

と書き表し，これを $f(x)$ の**不定積分** (indefinite integral) といいます．$f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する** (integrate) といい，積分される関数 $f(x)$ を被積分関数といいます．

$\boxed{\text{例}}$ 関数 x^2 の原始関数は $\frac{1}{3}x^3$，$\frac{1}{3}x^3+5$，$\frac{1}{3}x^3-\sqrt{7}$ など数多くありますが，そのうちのどれか一つを $\int x^2dx$ と書き表します[8]．関数 $\frac{1}{3}x^3$ も関数 $\int x^2dx$ も関数 x^2 の原始関数なので，定理 6.5.1 より，

$$\int x^2dx=\frac{1}{3}x^3+C\quad (C \text{ は定数}).$$

$\boxed{\text{終}}$

一般に，同じ区間を定義域とする関数 f と F とについて，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数なので，定理 6.5.1 より，F が f の原始関数であるとき

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\quad (C \text{ は定数}).$$

ここで現われる定数 C を**積分定数**といいます．

以下の２つの定理が微分と不定積分との関係の基本になります．

定理 6.5.2　関数 f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき，

$$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)\ .$$

証明　関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ は $f(x)$ の原始関数なので，$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)$．（証明終り）

定理 6.5.3　関数 F が微分可能である区間において，

$$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C\quad (C \text{ は積分定数}).$$

証明　関数 F が区間 I において微分可能であるとする．F の導関数を f とおく：$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$．F は f の原始関数である．関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ も $f(x)$ の原始関数なので，定理 6.5.1 より，区間 I において

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\quad (C \text{ は積分定数}).$$

$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ なので，$\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （C は積分定数）．

（証明終り）

$\boxed{\text{例題}}$ 次のことを示す：関数 x^3 に対して $\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+C$ （C は積分定数）．

〔方針〕 関数 F を $F(x)=\frac{1}{4}x^4$ とおいて，公式 $\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$ （C は積分定数） に当てはめる．そのために $\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ を計算する．

〔解答〕

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)=\frac{1}{4}4x^3=x^3\ .$$

よって，$x^3=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)$ なので，

$$\int x^3dx=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}x^4\right)\right\}dx=\frac{1}{4}x^4+C\quad (C \text{ は積分定数}).$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 6.5.2}}$　次のことを示しなさい: 関数 $\frac{1}{x^3}$（$x>0$）に対して $\int\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2x^2}+C$（$C$ は積分定数）．

$\boxed{\text{問題 6.5.3}}$　次のことを示しなさい: 関数 $\sqrt{x}$（$x\geq 0$）に対して $\int\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3}+C$（$C$ は積分定数）．

関数の不定積分はあるとは限りません．不定積分の存在について次の定理が成り立ちます．

定理 6.5.4　定義域が区間である関数 f が連続であれば，$f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ がある．

――――― 定理 6.5.1 の証明

定理 6.5.1 を証明します．

関数 f と F と G との定義域は同じ区間であるとします．F は f の原始関数であるとします：$F'(x)=f(x)$．G が f の原始関数であるならば，$G'(x)=f(x)=F'(x)$，定理 5.2.2 より，ある定数 C をとると $G(x)=F(x)+C$．逆に，ある定数 C をとると $G(x)=F(x)+C$ ならば，

$$G'(x)=\frac{d}{dx}G(x)=\frac{d}{dx}\{F(x)+C\}=F'(x)=f(x)\ ,$$

よって G は f の原始関数です．故に

$$G \text{ が } f \text{ の原始関数である} \iff \text{ある定数 } C \text{ をとると } G(x)=F(x)+C\quad .$$

---

[8] x^2 の不定積分 $\int x^2dx$ が関数 x^2 の原始関数のうちのどれであるかは決めません．$\int x^2dx$ は $\frac{1}{3}x^3+\frac{28}{3}$ かもしれませんし，$\frac{1}{3}x^3-8$ かもしれません．