§6.6　不定積分の公式

いくつかの関数の不定積分を求めます．前節の定理6.5.3が重要になります．

例として，余弦関数 $\cos x$ の不定積分 $\int \cos x\,dx$ を求めます．余弦関数 $\cos x$ の原始関数，つまり $\dfrac{d}{dx}F(x)=\cos x$ となる関数 $F(x)$ が分かれば，定理6.5.3より次のようになります：

$$\int \cos x\,dx=\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

正弦関数 $\sin x$ は余弦関数 $\cos x$ の原始関数です：$\dfrac{d}{dx}\sin x=\cos x$．従って

$$\int \cos x\,dx=\int\left(\frac{d}{dx}\sin x\right)dx=\sin x+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

冪関数 x^{p+1}（p は定数）を微分すると $\dfrac{d}{dx}x^{p+1}=(p+1)x^p$ なので，$p\neq -1$ のとき，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)=\frac{1}{p+1}\frac{d}{dx}x^{p+1}=\frac{1}{p+1}(p+1)x^p=x^p.$$

このことを用いて，定理6.5.3より不定積分 $\int x^p dx$ が求められます：

$$\int x^p dx=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p+1}x^{p+1}\right)\right\}dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

$\dfrac{d}{dx}e^x=e^x$ なので，定理6.5.3より，

$$\int e^x dx=\int\left(\frac{d}{dx}e^x\right)dx=e^x+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

$\dfrac{d}{dx}\ln|x|=\dfrac{1}{x}$（$x\neq 0$）（定理3.6.3）なので，定理6.5.3より，

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\left(\frac{d}{dx}\ln|x|\right)dx=\ln|x|+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

問題 6.6.1　次のことを示しなさい：$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$（C は積分定数）．

定数 a について $a>0$ とします．$\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ を計算します．$y=\dfrac{x}{a}$ とおいて合成関数の微分法（定理3.5）を用います：

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}=\frac{d}{dx}\sin^{-1}y=\frac{d}{dy}\sin^{-1}y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{d}{dx}\frac{x}{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}.$$

$a>0$ より $a=\sqrt{a^2}$ なので，

$$\frac{1}{a\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

よって $\dfrac{d}{dx}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ なので，定理6.5.3より，

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\int\left(\frac{d}{dx}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

問題 6.6.2　次のことを示しなさい：定数 a について $a\neq 0$ のとき $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$（$C$ は積分定数）．

このようにして以下の積分公式が導かれます．

（積分公式）　以下の公式において C は積分定数を表す．

$$\int k\,dx=kx+C\quad(k\text{ は定数}).$$

$$\int x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C\quad(p\text{ は定数で }p\neq -1).$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$$

$$\int e^x dx=e^x+C.$$

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$$

$$\int\cos x\,dx=\sin x+C.$$

$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C.$$

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C\quad(a\text{ は定数で }a\neq 0).$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C\quad(a\text{ は定数で }a>0).$$

例題　不定積分 $\int x^3 dx$，$\displaystyle\int\frac{1}{y^2}dy$，$\int\sqrt{u}\,du$ を計算する．

冪関数の積分公式 $\displaystyle\int x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$（$C$ は積分定数）に当てはめる．

$$\int x^3 dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

$$\int\frac{1}{y^2}dy=\int y^{-2}dy=\frac{1}{-2+1}y^{-2+1}+C=-\frac{1}{y}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

$$\int\sqrt{u}\,du=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}u^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{u^3}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

終

問題 6.6.3　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{x^4}dx$．　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt$．

例題　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{y^2+3}dy$ を計算する．

積分公式 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+a^2}dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$（$a$ は定数で $a\neq 0$）に当てはめる．

$$\int\frac{1}{y^2+3}dy=\int\frac{1}{y^2+\sqrt{3}^2}dy=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{3}}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

終

問題 6.6.4　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{7-y^2}}dy$．　　(2) $\displaystyle\int\frac{1}{u^2+\frac{1}{9}}du$．

―――― 関数の定義域と積分定数

関数 $\dfrac{1}{x^2}$（$x\neq 0$）の不定積分は次のようになりました：

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C\quad(C\text{ は積分定数}).$$

正確にいうとこれは間違いです．

不定積分の公式を導くために公式 $\displaystyle\int\left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\}dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）を用いましたが，これは，関数 F が微分可能である区間において成り立つ等式でした．関数 $-\dfrac{1}{x}$ は区間 $(0,\infty)$ において微分可能ですから，区間 $(0,\infty)$ において

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx=-\frac{1}{x}+C_1\quad(C_1\text{ は積分定数}).$$

更にまた，関数 $-\dfrac{1}{x}$ は区間 $(-\infty,0)$ において微分可能ですから，区間 $(-\infty,0)$ において

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\int\left\{\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{x}\right)\right\}dx=-\frac{1}{x}+C_2\quad(C_2\text{ は積分定数}).$$

従って，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx$ は正確に述べると次のようになります：

$$\int\frac{1}{x^2}dx=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}+C_1 & (x>0\text{ のとき})\\ -\dfrac{1}{x}+C_2 & (x<0\text{ のとき})\end{cases}\quad(C_1,C_2\text{ は積分定数}).$$

例えば，関数 $F(x)$（$x\neq 0$）を

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}+5 & (x>0\text{ のとき})\\ -\dfrac{1}{x}-3 & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

と定めると，$\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^2}$ ですから，$F(x)$ も $\dfrac{1}{x^2}$ の原始関数です．つまり，関数 $-\dfrac{1}{x}$ は 0 において微分可能でないので，不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x^2}dx$ は $x>0$ のときと $x<0$ のときでは積分定数が異なることがあります．

同様に，関数 $\dfrac{1}{x}$（$x\neq 0$）の不定積分を正確に述べると次のようになります：

$$\int\frac{1}{x}dx=\begin{cases}\ln x+C_1 & (x>0\text{ のとき})\\ \ln(-x)+C_2 & (x<0\text{ のとき})\end{cases}\quad(C_1,C_2\text{ は積分定数}).$$