§6.7　不定積分の性質

定理6.5.2と定理6.5.3とを用いて不定積分の性質を導きます.

> **定理6.7**　定数 k は変数 x と無関係とする． 区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとき，関数 $kf(x)$ の不定積分があって，
>
> $$\int\{kf(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx + C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$
>
> 同じ区間を定義域とする関数 $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx, \int g(x)\,dx$ があるとき，関数 $f(x)+g(x)$ 及び $f(x)-g(x)$ の不定積分があって，
>
> $$\int\{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx + C \quad（\text{複号同順，} C \text{ は積分定数}）.$$

証明　区間を定義域とする関数 $f(x)$ の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があるとする． 公式 $\int\{kf(x)\}\,dx = k\int f(x)\,dx + C$ （C は積分定数） を導く.

関数 F を $F(x) = k\int f(x)\,dx$ とおく． 定理6.5.2より $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ なので,

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\Big\{k\int f(x)\,dx\Big\} = k\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = kf(x)$$

つまり $kf(x) = \dfrac{d}{dx}F(x)$ ． 従って,

$$\int kf(x)\,dx = \int\Big\{\frac{d}{dx}F(x)\Big\}dx \ .$$

定理6.5.3より,

$$\int\Big\{\frac{d}{dx}F(x)\Big\}dx = F(x)+C = k\int f(x)\,dx + C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$

故に $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$ （C は積分定数）.

関数 $f(x), g(x)$ の定義域は区間 I で， $f(x), g(x)$ の各々の不定積分 $\int f(x)\,dx$, $\int g(x)\,dx$ あるとする． 公式 $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C$ （C は積分定数） を導く.

関数 G を $G(x) = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ とおく． 定理6.5.2より $\dfrac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$, $\dfrac{d}{dx}\int g(x)\,dx = g(x)$ なので,

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\Big\{\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\Big\} = \frac{d}{dx}\int f(x)\,dx + \frac{d}{dx}\int g(x)\,dx = f(x)+g(x)$$

つまり $f(x)+g(x) = \dfrac{d}{dx}G(x)$ ． 従って,

$$\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int\Big\{\frac{d}{dx}G(x)\Big\}dx \ .$$

定理6.5.3より,

$$\int\Big\{\frac{d}{dx}G(x)\Big\}dx = G(x)+C = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$

故に $\int\{f(x)+g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + C$ （C は積分定数）.

（証明終り）

この定理と前節の積分公式よりいくらか積分計算ができます.

[例解]　不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算します． 定理6.7より,

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3dx + \int\sin x\,dx + C_1 \quad（C_1 \text{ は積分定数}）.$$

定理6.7より $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx + C_2$ （C_2 は積分定数） で，更に $\int x^3dx = \dfrac{1}{4}x^4 + C_3$ （C_3 は積分定数） ですから,

$$\int 5x^3dx = 5\int x^3dx + C_2 = 5\Big(\frac{1}{4}x^4 + C_3\Big) + C_2 = \frac{5}{4}x^4 + 5C_3 + C_2 \ .$$

また， $\int\sin x\,dx = -\cos x + C_4$ （C_4 は積分定数） ですから,

$$\begin{aligned}\int(5x^3+\sin x)\,dx &= \int 5x^3dx + \int\sin x\,dx + C_1\\ &= \frac{5}{4}x^4 + 5C_3 + C_2 + (-\cos x + C_4) + C_1\\ &= \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C_1 + C_2 + 5C_3 + C_4 \ .\end{aligned}$$

$C = C_1 + C_2 + 5C_3 + C_4$ とおきます． C_1, C_2, C_3, C_4 は定数なので C も定数です. 結局次のようになります：

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$

[終]

このように，不定積分の計算の途中に現われる積分定数は最後に一つの積分定数にまとめることができます． そこで，いちいち積分定数を書くのは面倒ですから次のように約束します：

不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ は積分定数を含む.

そして，不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ を含む式では積分定数を省略することにします.

[例解]　不定積分 $\int(5x^3+\sin x)\,dx$ を計算します． 等式

$$\int(5x^3+\sin x)\,dx = \int 5x^3dx + \int\sin x\,dx + C_1 \quad（C_1 \text{ は積分定数}）$$

の右辺の積分定数 C_1 は不定積分の式 $\int 5x^3dx$ 或いは $\int\sin x\,dx$ に含まれると考えて，次のように計算します：

$$\int(5x^3+7\sin x)\,dx = \int 5x^3dx + \int\sin x\,dx \ .$$

また，等式 $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx + C_2$ （C_2 は積分定数） の右辺の積分定数 C_2 は不定積分の式 $\int x^3dx$ の中に含まれると考えて， $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx$ と計算します． このようにすると次のように計算できます：

$$\begin{aligned}\int(5x^3+\sin x)\,dx &= \int 5x^3dx + \int\sin x\,dx = 5\int x^3dx + (-\cos x)\\ &= \frac{5}{4}x^4 - \cos x + C \qquad （C \text{ は積分定数}）.\end{aligned}$$

この最後の式 $\dfrac{5}{4}x^4 - \cos x + C$ の中には不定積分の式がありませんから，積分定数 C を省略できません.

[終]

このようにすると，不定積分の計算では

不定積分の式 $\int f(x)\,dx$ が含まれなくなった式から積分定数を付ける

ことになります.

[例題]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{2\cos t + 3}{5}\,dt$ を計算する.

$$\begin{aligned}\int\frac{2\cos t+3}{5}\,dt &= \frac{1}{5}\int(2\cos t+3)\,dt = \frac{1}{5}\Big(\int 2\cos t\,dt + \int 3\,dt\Big)\\ &= \frac{1}{5}\Big(2\int\cos t\,dt + 3t\Big) = \frac{1}{5}(2\sin t + 3t) + C\\ &= \frac{2\sin t + 3t}{5} + C \ ;\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である.

[終]

[問題 6.7.1]　以下の不定積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int\Big(\frac{5}{2}x^2 - 4x + 3\Big)\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int\frac{3\sin t + 5}{7}\,dt$.

[例題]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{5y+3}{2y^2}\,dy$ を計算する.

$\dfrac{5y+3}{2y^2} = \dfrac{5y}{2y^2} + \dfrac{3}{2y^2} = \dfrac{5}{2y} + \dfrac{3}{2y^2}$ なので,

$$\begin{aligned}\int\frac{5y+3}{2y^2}\,dy &= \int\Big(\frac{5}{2y} + \frac{3}{2y^2}\Big)dy = \frac{5}{2}\int\frac{1}{y}\,dy + \frac{3}{2}\int y^{-2}\,dy = \frac{5}{2}\ln|y| + \frac{3}{2}(-y^{-1}) + C\\ &= \frac{5}{2}\ln|y| - \frac{3}{2y} + C \ ;\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である.

[終]

[問題 6.7.2]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{2u-5}{3u^2}\,du$ を計算しなさい.

[例題]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{7}{5x^2+4}\,dx$ を計算する.

$$\begin{aligned}\int\frac{7}{5x^2+4}\,dx &= \int\frac{7}{5\Big(x^2+\frac{4}{5}\Big)}\,dx = \int\frac{7}{5}\frac{1}{x^2+\frac{4}{5}}\,dx = \frac{7}{5}\int\frac{1}{x^2+\Big(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Big)^2}\,dx\\ &= \frac{7}{5}\frac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}\tan^{-1}\frac{x}{\dfrac{2}{\sqrt{5}}} + C = \frac{7\sqrt{5}}{10}\tan^{-1}\frac{\sqrt{5}x}{2} + C \ ;\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である.

[終]

[問題 6.7.3]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{6}{4x^2+3}\,dx$ を計算しなさい.

[例題]　不定積分 $\int\sqrt{7x}\,dx$ を計算する.

$\sqrt{7x} = \sqrt{7}\sqrt{x}$ なので,

$$\begin{aligned}\int\sqrt{7x}\,dx &= \int\sqrt{7}\sqrt{x}\,dx = \sqrt{7}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \sqrt{7}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{7}}{3}x\sqrt{x} + C\\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{7x} + C \ ;\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である.

[終]

[問題 6.7.4]　不定積分 $\displaystyle\int\frac{3}{\sqrt{2y}}\,dy$ を計算しなさい.

定数 a は実数で $a>0$, $a\neq 1$ とします． a を底とする指数関数 a^x の不定積分 $\int a^xdx$ を求めます． 微分公式 $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x\ln a$ より

$$\int a^x\ln a\,dx = a^x + B \quad（B \text{ は積分定数}）.$$

$\ln a$ は定数なので $\int a^x\ln a\,dx = (\ln a)\int a^xdx$ ， 従って,

$$(\ln a)\int a^xdx = a^x + B \ ,$$

$$\int a^xdx = \frac{a^x+B}{\ln a} = \frac{a^x}{\ln a} + \frac{B}{\ln a} \ .$$

$C = \dfrac{B}{\ln a}$ とおくと $\int a^xdx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ ． $\ln a$ は定数なので， $C = \dfrac{B}{\ln a}$ も定数である． 故に指数関数 a^x の積分公式は

$$\int a^xdx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad（C \text{ は積分定数}）.$$