§6.8　定積分と不定積分

まず表記法を一つ約束します．関数 F および F の定義域に属す実数 a と b とに対し，$F(b)-F(a)$ を，$\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ と書き表します：

$$\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a)\ .$$

変数 x に代入することが明らかなときは，$\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}$ を単に $\big[F(x)\big]_a^b$ と略します：

$$\big[F(x)\big]_a^b=\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}=F(b)-F(a)\ .$$

例えば次のようになります．

$$\big[\cos x\big]_2^5=\big[\cos x\big]_{x=2}^{x=5}=\cos 5-\cos 2\ .$$

$$\big[x^2-3x\big]_2^{-1}=\big[x^2-3x\big]_{x=2}^{x=-1}=(-1)^2-3\cdot(-1)-(2^2-3\cdot 2)=6\ .$$

例えば，$\big[\sin x+5\big]_{x=3}^{x=7}$ と $\big[\sin x\big]_{x=3}^{x=7}$ とは同じ値になります：

$$\big[\sin x+5\big]_{x=3}^{x=7}=\sin 7+5-(\sin 3+5)=\sin 7-\sin 3=\big[\sin x\big]_{x=3}^{x=7}\ .$$

一般的に述べます：関数 F の定義域に属す定数 a と b 及び，変数 x と無関係な定数 C について，

$$\begin{aligned}\big[F(x)+C\big]_{x=a}^{x=b}&=F(b)+C-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)\\&=\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}\ .\end{aligned}$$

6.4節で述べた微分積分の基本定理を再述します．

微分積分の基本定理　関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，a と b とが属する区間において関数 F が微分可能で $\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ．

実数 a と b とが属する区間において関数 f は連続であるとします．定理6.1.3より f は a から b まで積分可能です．また，定理6.5.4より f の不定積分 $\int f(x)\,dx$ があります．$F(x)=\int f(x)\,dx$ とおきます．定理6.5.2より $\dfrac{d}{dx}F(x)=\dfrac{d}{dx}\big\{\int f(x)\,dx\big\}=f(x)$ ですから，微分積分の基本定理より $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ ；従って

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=\big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b}\ .$$

定理6.8　実数 a と b とが属する区間において関数 f が連続であるとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\int f(x)\,dx\Big]_{x=a}^{x=b}\ .$$

この定理は，不定積分から定積分を計算するために微分積分の基本定理を述べ直したに過ぎません．

例　定積分 $\int_4^9 \cos x\,dx$ を計算します．$\int\cos x\,dx=\sin x+C$ （C は積分定数）なので，定理6.8より

$$\int_4^9\cos x\,dx=\Big[\int\cos x\,dx\Big]_4^9=\big[\sin x+C\big]_4^9\ ;$$

先に述べたように $\big[\sin x+C\big]_4^9=\big[\sin x\big]_4^9$ ですから，

$$\int_4^9\cos x\,dx=\big[\sin x+C\big]_4^9=\big[\sin x\big]_4^9=\sin 9-\sin 4\ .$$

終

このように，定積分の計算において不定積分の積分定数 C は相殺されて消えてしまうので，積分定数は定積分の計算結果に影響しません[7]．ですから，定積分の計算において，不定積分の積分定数をしばしば省略します．

例題　定積分 $\int_{-1}^2(y^2-3y+2)\,dy$ を計算する．

積分定数を C とおくと，

$$\int(y^2-3y+2)\,dy=\frac{1}{3}y^3-3\frac{1}{2}y^2+2y+C=\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y+C\ .$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2(y^2-3y+2)\,dy&=\Big[\frac{1}{3}y^3-\frac{3}{2}y^2+2y\Big]_{-1}^2=\frac{8}{3}-6+4-\Big(-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-2\Big)\\&=\frac{9}{2}\ .\end{aligned}$$

終

問題6.8.1　定積分 $\int_{-2}^4(2y^2-5y+3)\,dy$ を計算しなさい．

例題　定積分 $\displaystyle\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin t+4}{7}\,dt$ を計算する．

積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\frac{3\sin t+4}{7}\,dt&=\frac{1}{7}\int(3\sin t+4)\,dt=\frac{1}{7}(-3\cos t+4t)+C\\&=\frac{1}{7}(4t-3\cos t)+C\ .\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin t+4}{7}\,dt&=\Big[\frac{1}{7}(4t-3\cos t)\Big]_\pi^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{7}\Big(4\frac{\pi}{2}-3\cos\frac{\pi}{2}\Big)-\frac{1}{7}(4\pi-3\cos\pi)\\&=\frac{2\pi}{7}-\frac{4\pi+3}{7}=-\frac{2\pi+3}{7}\ .\end{aligned}$$

終

問題6.8.2　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\frac{4\cos\theta-3}{5}\,d\theta$ を計算しなさい．

例題　定積分 $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^0\frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$ を計算する．

積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx&=\int\frac{3}{\sqrt{4\big(\frac{1}{4}-x^2\big)}}\,dx=\int\frac{3}{\sqrt{4}\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}\,dx\\&=\frac{3}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\big(\frac{1}{2}\big)^2-x^2}}\,dx=\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}}+C\\&=\frac{3}{2}\sin^{-1}(2x)+C\ .\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{\frac{1}{3}}^0\frac{3}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx=\Big[\frac{3}{2}\sin^{-1}(2x)\Big]_{\frac{1}{3}}^0=\frac{3}{2}\Big(\sin^{-1}0-\sin^{-1}\frac{2}{3}\Big)=-\frac{3}{2}\sin^{-1}\frac{2}{3}\ .$$

終

問題6.8.3　以下の定積分を計算しなさい．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{3}{\sqrt{4-9x^2}}\,dx\ .$　　(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^1\frac{5t+4}{t^2}\,dt\ .$

---

[7] 定積分の定義は不定積分と無関係ですから，これは当然のことです．