

§6.9 定積分の性質

定積分に関する定理を幾つか述べます。

定理 6.9.1 k は定数とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき、関数 $kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり、

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx ,$$
$$\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \quad (\text{複号同順}) .$$

後でこの定理の一部を証明します。

例題 定積分 $\int_0^2 \frac{6x^2 + \cos x}{7} dx$ を計算する。

【解説】

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{6x^2 + \cos x}{7} dx &= \frac{1}{7} \int_0^2 (6x^2 + \cos x) dx = \frac{1}{7} (\int_0^2 6x^2 dx + \int_0^2 \cos x dx) \\ &= \frac{1}{7} (6 \int_0^2 x^2 dx + [\sin x]_0^2) = \frac{1}{7} (6 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 + \sin 2 - \sin 0) \\ &= \frac{16 + \sin 2}{7} . \end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい。

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 + \cos x}{7} dx &= \frac{1}{7} \int (6x^2 + \cos x) dx = \frac{1}{7} (\int 6x^2 dx + \int \cos x dx) \\ &= \frac{1}{7} (6 \int x^2 dx + \sin x) = \frac{1}{7} \left(6 \cdot \frac{1}{3} x^3 + \sin x \right) + C \\ &= \frac{2x^3 + \sin x}{7} + C ; \end{aligned}$$

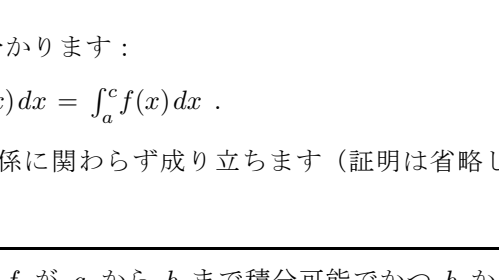
ここで C は積分定数である。よって、

$$\int_0^2 \frac{6x^2 + \cos x}{7} dx = \left[\frac{2x^3 + \sin x}{7} \right]_0^2 = \frac{2 \cdot 8 + \sin 2}{7} - \frac{0 + \sin 0}{7} = \frac{16 + \sin 2}{7} . \quad \text{終}$$

問題 6.9.1 以下の定積分を計算しなさい。

$$(1) \int_2^0 (5x^3 - 3e^x) dx . \quad (2) \int_0^\pi \frac{x - 3 \sin x}{5} dx .$$

実数 a, b, c について $a \leq b \leq c$ とします。また、関数 f は a から c まで積分可能で、区間 $[a, c]$ の各実数 x で $f(x) \geq 0$ とします。右図のように、 xy 座標平面において、 $y = f(x)$ のグラフと直線 $x = a$ と $x = c$ と x 軸とで囲まれる領域を、直線 $x = b$



で仕切ります。6.2節で述べたように次のことが成り立ちます：

領域 の面積は $\int_a^b f(x) dx$, 領域 の面積は $\int_b^c f(x) dx$,

この2つの領域を併せた領域 の面積は $\int_a^c f(x) dx$.

このことから次の等式が成り立つことが分かります：

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx .$$

実は、この等式は、実数 a, b, c の大小関係に関わらず成り立ちます（証明は省略します）。

定理 6.9.2 実数 a, b, c に対して、関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき、 f は a から c まで積分可能であり、

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx .$$

次の定理が成り立ちます。その証明は後にします。

定理 6.9.3 実数 a と b とについて $a \leq b$ で、関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする。区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ ならば、

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx .$$

例題 関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \neq 1 \text{ かつ } x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (x = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

$x = 1$ のときと $x = 2$ のときだけ $f(x) \neq x^2$ ですが、それ以外のときは $f(x) = x^2$ です。このようなとき、定積分 $\int_0^3 f(x) dx$ と $\int_0^3 x^2 dx$ とは同じ値になります：

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = \frac{1}{3} 3^3 - 0 = 9 . \quad \text{終}$$

一般的にいうと次のようになります：関数 f が a から b まで積分可能であるとき、関数 g について、区間 $[a, b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ を除く $[a, b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば、つまり、 $a \leq x \leq b$ となる実数 x について $x \neq c_1, x \neq c_2, x \neq c_3, \dots, x \neq c_n$ のとき $g(x) = f(x)$ ならば、 $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. 証明は省略します。

定理 6.9.4 実数 a と b とについて $a \leq b$ で、関数 f は a から b まで積分可能であるとする。関数 g について、区間 $[a, b]$ の有限個の実数を除く $[a, b]$ の各実数 x について $g(x) = f(x)$ ならば、 g は a から b まで積分可能であり、 $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

例題 実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & (x \neq 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_2^\pi g(x) dx$ を計算する。

$2 \leq x \leq \pi$ となる実数 x について $x \neq 3$ のとき $g(x) = \sin x$ なので、定理 6.9.4 により $\int_2^\pi g(x) dx = \int_2^\pi \sin x dx$. $\int_2^\pi \sin x dx$ を計算する：

$$\int_2^\pi \sin x dx = [-\cos x]_2^\pi = -\cos \pi - (-\cos 2) = 1 + \cos 2 .$$

故に $\int_2^\pi g(x) dx = 1 + \cos 2$. 終

問題 6.9.2 実数全体を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (x \neq 2 \text{ のとき}) \\ 4 & (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

f の定積分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^3 f(x) dx$ を計算しなさい。

例題 関数 f について、 $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$ とする。定積分 $\int_3^7 f(x) dx$ を計算する。

$3 \leq x \leq 7$ となる実数 x について、 $x \neq 3, x \neq 7$ のとき $f(x) = \frac{1}{x}$ なので、定理 6.9.4 より $\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 \frac{1}{x} dx$. 従って、

$$\int_3^7 f(x) dx = \int_3^7 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln \frac{7}{3} . \quad \text{終}$$

問題 6.9.3 関数 g について、 $0 < x < 3$ のとき $g(x) = \frac{2}{x^2 + 3}$ とします。定積分 $\int_0^3 g(x) dx$ を計算しなさい。

例題 実数 $[0, 9]$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} & (0 \leq x < 2 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (2 < x \leq 9 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^9 \psi(x) dx$ を計算する。

【解説】 定理 6.9.2 より $\int_0^9 \psi(x) dx = \int_0^2 \psi(x) dx + \int_2^9 \psi(x) dx$. $\int_0^2 \psi(x) dx$ と $\int_2^9 \psi(x) dx$ とに分けて計算する。

$0 \leq x < 2$ となる実数 x について $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ なので、

$$\int_0^2 \psi(x) dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx = \left[\sin^{-1} \frac{x}{3} \right]_0^2 = \sin^{-1} \frac{2}{3} - \sin^{-1} 0 = \sin^{-1} \frac{2}{3} .$$

$2 < x \leq 9$ となる実数 x について $\psi(x) = \sqrt{x}$ なので、

$$\begin{aligned} \int_2^9 \psi(x) dx &= \int_2^9 \sqrt{x} dx = \int_2^9 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_2^9 = \frac{2}{3} \left[x \sqrt{x} \right]_2^9 = \frac{2}{3} (9\sqrt{9} - 2\sqrt{2}) \\ &= 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} . \end{aligned}$$

従って、

$$\int_0^9 \psi(x) dx = \int_0^2 \psi(x) dx + \int_2^9 \psi(x) dx = \sin^{-1} \frac{2}{3} + 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} . \quad \text{終}$$

問題 6.9.4 実数 $[1, 9]$ を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{6}{x^2} & (1 \leq x < 3 \text{ のとき}) \\ \frac{4}{x} & (3 \leq x \leq 9 \text{ のとき}) \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^9 \varphi(x) dx$ を計算しなさい。

定積分はリーマン和の極限值ですから、リーマン和の極限值を計算するために定積分を用いることがあります。

例題 数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ を次のように定める：正の各自然数 n に対して $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{3 + \frac{5}{n}k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を計算する。

正の自然数 n に対して、 $x_k = 3 + \frac{5}{n}k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$) とおく。自然数 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ について

$$x_k - x_{k-1} = 3 + \frac{5}{n}k - \left(3 + \frac{5}{n}(k-1) \right) = \frac{5}{n} .$$

数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は公差 $\frac{5}{n}$ の等差数列であり、

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = 8 .$$

$x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ より $\frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{5}$ なので、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{3 + \frac{5}{n}k} = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{3 + \frac{5}{n}k} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k} \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^n \{ \sqrt{x_k} (x_k - x_{k-1}) \} . \end{aligned}$$

ここで $\sum_{k=1}^n \{ \sqrt{x_k} (x_k - x_{k-1}) \}$ は関数 \sqrt{x} のリーマン和である。

$$\max \{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1} \} = \frac{5}{n} ;$$

この値は $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する。よって、 $n \rightarrow \infty$ のとき関数 \sqrt{x} のリーマン和 $\sum_{k=1}^n \{ \sqrt{x_k} (x_k - x_{k-1}) \}$ の極限值は定積分 $\int_3^8 \sqrt{x} dx$ である。故に

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{1}{5} \int_3^8 \sqrt{x} dx = \frac{1}{5} \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} \right]_3^8 = \frac{2}{15} (8\sqrt{8} - 3\sqrt{3}) \\ &= \frac{32\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{15} . \end{aligned} \quad \text{終}$$

問題 6.9.5 数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \frac{6}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{5 + \frac{3}{n}k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を計算しなさい。

問題 6.9.6 数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{8}{3n+4k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n \geq 1}$ の極限值を計算しなさい。

定理の証明

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき、定数 k に対して関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり、 $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$.

証明 実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする。

正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max \{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1} \} ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} , \quad T_n = \sum_{k=1}^n \{ kf(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ の、 T_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和である。このとき、

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{ kf(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} = k \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} = k S_n .$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。関数 $f(x)$ は実数 a から実数 b まで積分可能なので $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$. 故に、

$$\int_a^b kf(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (k S_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = k \int_a^b f(x) dx .$$

(証明終り)

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき、関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり、 $\int_a^b \{f(x)+g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

証明 実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとする。

正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max \{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1} \} ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} , \quad T_n = \sum_{k=1}^n \{ g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ の、 T_n は関数 $g(x)$ の、 U_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和である。このとき、

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=1}^n \{ \{f(\xi_k) + g(\xi_k)\} (x_k - x_{k-1}) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) + g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} \\ &= \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} + \sum_{k=1}^n \{ g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} \\ &= S_n + T_n . \end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a から実数 b まで積分可能なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b g(x) dx$. 故に、

$$\begin{aligned} \int_a^b \{f(x)+g(x)\} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n + \lim_{n \rightarrow \infty} T_n \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx . \end{aligned}$$

(証明終り)

定理 6.9.3 を証明します：実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとき、区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ ならば、 $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

証明 実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f, g は a から b まで積分可能であるとする。更に、区間 $[a, b]$ の各実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする。

正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max \{ x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1} \} ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} , \quad T_n = \sum_{k=1}^n \{ g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} ,$$

とおく； S_n は関数 f の、 T_n は関数 g のリーマン和である。 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 ξ_k は区間 $[a, b]$ に属するので仮定より $f(\xi_k) \leq g(\xi_k)$, 更に $x_{k-1} \leq x_k$ より $x_k - x_{k-1} \geq 0$ なので、

$$f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \leq g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) ;$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \{ f(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \} \leq \sum_{k=1}^n \{ g(\xi_k) (x_k - x_{k-1}) \}$$

つまり $S_n \leq T_n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とする。正の各自然数 n について $S_n \leq T_n$ なので、定理 5.6.3 より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} T_n .$$

関数 f, g は実数 a から実数 b まで積分可能なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx$, $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \int_a^b g(x) dx$; 故に $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$. (証明終り)