§6.9　定積分の性質

定積分に関する定理を幾つか述べます.

定理 6.9.1　k は定数とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$
$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad （複号同順） \ .$$

後でこの定理の一部を証明します.

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx$ を計算する.

〔解説〕

$$\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \frac{1}{7}\int_0^2 (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int_0^2 6x^2dx + \int_0^2 \cos x\,dx\Big)$$
$$= \frac{1}{7}\Big(6\int_0^2 x^2dx + \big[\sin x\big]_0^2\Big) = \frac{1}{7}\Big(6\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 + \sin 2 - \sin 0\Big)$$
$$= \frac{16+\sin 2}{7} \ .$$

不定積分を計算してもよい.

$$\int \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \frac{1}{7}\int (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int 6x^2dx + \int \cos x\,dx\Big)$$
$$= \frac{1}{7}\Big(6\int x^2dx + \sin x\Big) = \frac{1}{7}\Big(6\frac{1}{3}x^3 + \sin x\Big) + C$$
$$= \frac{2x^3+\sin x}{7} + C \ ;$$

ここで C は積分定数である. よって,

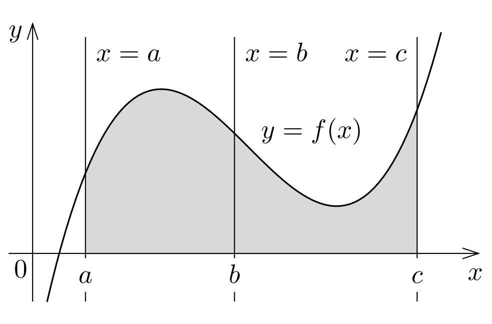
$$\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \Big[\frac{2x^3+\sin x}{7}\Big]_0^2 = \frac{2\cdot 8+\sin 2}{7} - \frac{0+\sin 0}{7}$$
$$= \frac{16+\sin 2}{7} \ .$$

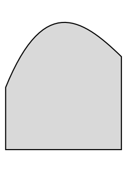
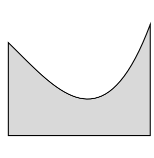
終

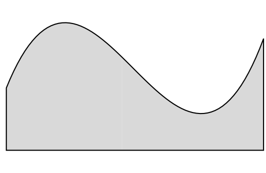
問題 6.9.1　以下の定積分を計算しなさい.

(1) $\int_2^0 (5x^3-3e^x)\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x-3\sin x}{5}\,dx$.

実数 a,b,c について $a\le b\le c$ とします. また, 関数 f は a から c まで積分可能で, 区間 $[a,c]$ の各実数 x で $f(x)\ge 0$ とします. 右図のように, xy 座標平面において, $y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を, 直線 $x=b$ で仕切ります. 6.2 節で述べたように次のことが成り立ちます：



領域  の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$,　領域  の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$,

この 2 つの領域を併せた領域  の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$.

このことから次の等式が成り立つことが分かります：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

実は, この等式は, 実数 a,b,c の大小関係に関わらず成り立ちます（証明は省略します）.

定理 6.9.2　実数 a,b,c に対して, 関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき, f は a から c まで積分可能であり,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

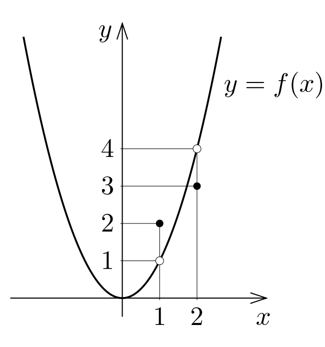
次の定理が成り立ちます. その証明は後にします.

定理 6.9.3　実数 a と b とについて $a\le b$ で, 関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする. 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

例解　関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & （ x\ne 1 \text{ かつ } x\ne 2 \text{ のとき}） \\ 2 & （ x=1 \text{ のとき}） \\ 3 & （ x=2 \text{ のとき}） \end{cases} \ .$$



$x=1$ のときと $x=2$ のときだけ $f(x)\ne x^2$ ですが, それ以外のときは $f(x)=x^2$ です. このようなとき, 定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは同じ値になります：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - 0 = 9 \ .$$

終

一般的にいうと次のようになります：関数 f が a から b まで積分可能であるとき, 関数 g について, 区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1,c_2,c_3,\dots,c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば, つまり, $a\le x\le b$ となる実数 x について $x\ne c_1$, $x\ne c_2$, $x\ne c_3$, $\cdots$, $x\ne c_n$ のとき $g(x)=f(x)$ ならば, $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$. 証明は省略します.

定理 6.9.4　実数 a と b とについて $a\le b$ で, 関数 f は a から b まで積分可能であるとする. 関数 g について, 区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば, g は a から b まで積分可能であり, $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

例題　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & （ x\ne 3 \text{ のとき}） \\ 5 & （ x=3 \text{ のとき}） \end{cases} \ .$$

g の定積分 $\int_2^\pi g(x)\,dx$ を計算する.

$2\le x\le \pi$ となる実数 x について $x\ne 3$ のとき $g(x)=\sin x$ なので, 定理 6.9.4 により $\int_2^\pi g(x)\,dx = \int_2^\pi \sin x\,dx$. $\int_2^\pi \sin x\,dx$ を計算する：

$$\int_2^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_2^\pi = -\cos\pi - (-\cos 2) = 1+\cos 2 \ .$$

故に $\int_2^\pi g(x)\,dx = 1+\cos 2$.

終

問題 6.9.2　実数全体を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & （ x\ne 2 \text{ のとき}） \\ 4 & （ x=2 \text{ のとき}） \end{cases} \ .$$

f の定積分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^3 f(x)\,dx$ を計算しなさい.

例題　関数 f について, $3<x<7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする. 定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する.

$3\le x\le 7$ となる実数 x について, $x\ne 3$, $x\ne 7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ なので, 定理 6.9.4 より $\int_3^7 f(x)\,dx = \displaystyle\int_3^7 \frac{1}{x}\,dx$. 従って,

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln\frac{7}{3} \ .$$

終

問題 6.9.3　関数 g について, $0<x<3$ のとき $g(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$ とします. 定積分 $\int_0^3 g(x)\,dx$ を計算しなさい.

例題　実数 $[0,9]$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} & （ 0\le x\le 2 \text{ のとき}） \\ \sqrt{x} & （ 2<x\le 9 \text{ のとき}） \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^9 \psi(x)\,dx$ を計算する.

〔解説〕　定理 6.9.2 より $\int_0^9 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \psi(x)\,dx + \int_2^9 \psi(x)\,dx$. $\int_0^2 \psi(x)\,dx$ と $\int_2^9 \psi(x)\,dx$ とに分けて計算する.

$0\le x\le 2$ となる実数 x について $\psi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ なので,

$$\int_0^2 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \Big[\sin^{-1}\frac{x}{3}\Big]_0^2 = \sin^{-1}\frac{2}{3} - \sin^{-1}0 = \sin^{-1}\frac{2}{3} \ .$$

$2\le x\le 9$ となる実数 x について $x\ne 2$ のとき $f(x)=\sqrt{x}$ なので,

$$\int_2^9 \psi(x)\,dx = \int_2^9 \sqrt{x}\,dx = \int_2^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_2^9 = \frac{2}{3}\Big[x\sqrt{x}\Big]_2^9 = \frac{2}{3}\big(9\sqrt{9} - 2\sqrt{2}\big)$$
$$= 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \ .$$

従って,

$$\int_0^9 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \psi(x)\,dx + \int_2^9 \psi(x)\,dx = \sin^{-1}\frac{2}{3} + 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \ .$$

終

問題 6.9.4　実数 $[1,9]$ を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x^2} & （ 1\le x<3 \text{ のとき}） \\ \dfrac{4}{x} & （ 3\le x\le 9 \text{ のとき}） \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_1^9 \varphi(x)\,dx$ を計算しなさい.

定積分はリーマン和の極限値ですから, リーマン和の極限値を計算するために定積分を用いることがあります.

例題　数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ を次のように定める：正の各自然数 n に対して $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{3+\frac{5}{n}k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ の極限値を計算する.

正の自然数 n に対して, $x_k = 3+\dfrac{5}{n}k$ （ $k=0,1,2,3,\dots,n$ ）とおく. 自然数 $k=1,2,3,\dots,n$ について

$$x_k - x_{k-1} = 3+\frac{5}{n}k - \Big\{3+\frac{5}{n}(k-1)\Big\} = \frac{5}{n} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ は公差 $\dfrac{5}{n}$ の等差数列であり,

$$3 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 8 \ .$$

$x_k - x_{k-1} = \dfrac{5}{n}$ より $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{5}$ なので,

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{3+\frac{5}{n}k} = \sum_{k=1}^n \Big(\sqrt{3+\frac{5}{n}k}\,\frac{1}{n}\Big) = \sum_{k=1}^n \Big(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k - x_{k-1}}{5}\Big)$$
$$= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^n \big\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\big\} \ .$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^n \big\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\big\}$ は関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和である.

$$\max\{x_1-x_0,\, x_2-x_1,\, x_3-x_1,\, \dots,\, x_n-x_{n-1}\} = \frac{5}{n} \ ;$$

この値は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する. よって, $n\to\infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^n \big\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\big\}$ の極限値は定積分 $\int_3^8 \sqrt{x}\,dx$ である. 故に

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}\int_3^8 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{5}\Big[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\Big]_3^8 = \frac{2}{15}\big(8\sqrt{8} - 3\sqrt{3}\big)$$
$$= \frac{32\sqrt{2} - 6\sqrt{3}}{15} \ .$$

終

問題 6.9.5　数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \dfrac{6}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{5+\frac{3}{n}k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ の極限値を計算しなさい.

問題 6.9.6　数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{8}{3n+4k}$. 定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge 1}$ の極限値を計算しなさい.

―――― 定理の証明

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 定数 k に対して関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする.

正の自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$$

となる実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,\, x_2-x_1,\, x_3-x_2,\, \dots,\, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ の, T_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和である. このとき,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = k\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = kS_n \ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする. 関数 $f(x)$ は実数 a から実数 b まで積分可能なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$. 故に,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(kS_n) = k\lim_{n\to\infty} S_n = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき, 関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり, $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとする.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,\, x_2-x_1,\, x_3-x_2,\, \dots,\, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$
$$U_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ の, T_n は関数 $g(x)$ の, U_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和である. このとき,

$$U_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]$$
$$= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$= S_n + T_n \ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a から実数 b まで積分可能なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$. 故に,

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n+T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.3 を証明します：実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとき, 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ ならば, $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a\le b$ で, 関数 f,g は a から b まで積分可能であるとする. 更に, 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x)\le g(x)$ とする.

正の自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び

$$x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n$$

となる実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0,\, x_2-x_1,\, x_3-x_2,\, \dots,\, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく； S_n は関数 f の, T_n は関数 g のリーマン和である. $k=1,2,3,\dots,n$ に対して, ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので仮定より $f(\xi_k)\le g(\xi_k)$, 更に $x_{k-1}\le x_k$ より $x_k - x_{k-1}\ge 0$ なので,

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \ ;$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \le \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

つまり $S_n \le T_n$.

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする. 正の各自然数 n について $S_n\le T_n$ なので, 定理 5.6.3 より

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} T_n \ .$$

関数 f,g は実数 a から実数 b まで積分可能なので, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ；故に $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.　（証明終り）