§6.9　定積分の性質

定積分に関する定理を幾つか述べます．

定理 6.9.1　k は定数とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $kf(x)$，$f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$

$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad \text{（複号同順）} \ .$$

後でこの定理の一部を証明します．

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx$ を計算する．

〔解説〕

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx &= \frac{1}{7}\int_0^2 (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int_0^2 6x^2dx + \int_0^2 \cos x\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{7}\Big(6\int_0^2 x^2dx + \big[\sin x\big]_0^2\Big) = \frac{1}{7}\left(6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 + \sin 2 - \sin 0\right)\\ &= \frac{16+\sin 2}{7} \ .\end{aligned}$$

不定積分を計算してもよい．

$$\begin{aligned}\int \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx &= \frac{1}{7}\int (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int 6x^2dx + \int \cos x\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{7}\Big(6\int x^2dx + \sin x\Big) = \frac{1}{7}\left(6\frac{1}{3}x^3 + \sin x\right) + C\\ &= \frac{2x^3+\sin x}{7} + C \ ;\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である．よって，

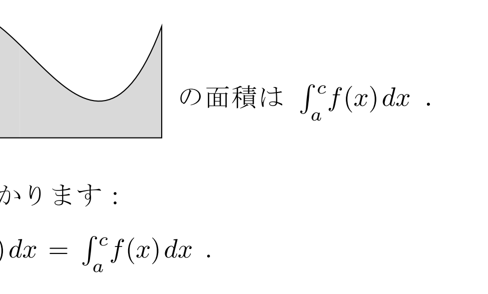
$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx &= \left[\frac{2x^3+\sin x}{7}\right]_0^2 = \frac{2\cdot 8+\sin 2}{7} - \frac{0+\sin 0}{7}\\ &= \frac{16+\sin 2}{7} \ .\end{aligned}$$

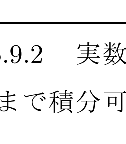
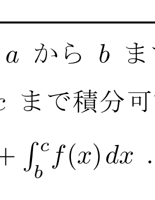
終

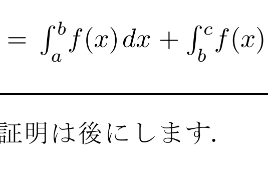
問題 6.9.1　以下の定積分を計算しなさい．

(1) $\int_2^0 (5x^3-3e^x)\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x-3\sin x}{5}\,dx$.

実数 a,b,c について $a \le b \le c$ とします．また，関数 f は a から c まで積分可能で，区間 $[a,c]$ の各実数 x で $f(x) \ge 0$ とします．右図のように，xy 座標平面において，$y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を，直線 $x=b$ で仕切ります．6.2 節で述べたように次のことが成り立ちます：



領域  の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ，　領域  の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

この 2 つの領域を併せた領域  の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$ ．

このことから次の等式が成り立つことが分かります：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

実は，この等式は，実数 a,b,c の大小関係に関わらず成り立ちます（証明は省略します）．

定理 6.9.2　実数 a,b,c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり，

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

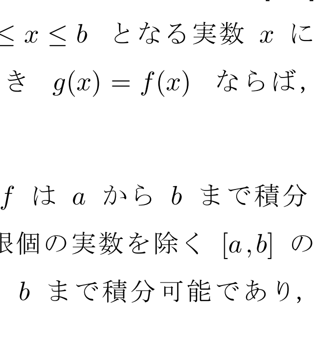
次の定理が成り立ちます．その証明は後にします．

定理 6.9.3　実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする．区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

例解　関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (\ x \ne 1 \text{ かつ } x \ne 2 \text{ のとき}) \\ 2 & (\ x = 1 \text{ のとき}) \\ 3 & (\ x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$



$x=1$ のときと $x=2$ のときだけ $f(x) \ne x^2$ ですが，それ以外のときは $f(x)=x^2$ です．このようなとき，定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは同じ値になります：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - 0 = 9 \ .$$

終

一般的にいうと次のようになります：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，つまり，$a \le x \le b$ となる実数 x について $x \ne c_1$ ，$x \ne c_2$ ，$x \ne c_3$ ，$\cdots$ ，$x \ne c_n$ のとき $g(x)=f(x)$ ならば，$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．証明は省略します．

定理 6.9.4　実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする．関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，g は a から b まで積分可能であり，$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ．

例題　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \sin x & (\ x \ne 3 \text{ のとき}) \\ 5 & (\ x = 3 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

g の定積分 $\int_2^\pi g(x)\,dx$ を計算する．

$2 \le x \le \pi$ となる実数 x について $x \ne 3$ のとき $g(x)=\sin x$ なので，定理 6.9.4 により $\int_2^\pi g(x)\,dx = \int_2^\pi \sin x\,dx$ ．$\int_2^\pi \sin x\,dx$ を計算する：

$$\int_2^\pi \sin x\,dx = \big[-\cos x\big]_2^\pi = -\cos\pi - (-\cos 2) = 1+\cos 2 \ .$$

故に $\int_2^\pi g(x)\,dx = 1+\cos 2$ ．

終

問題 6.9.2　実数全体を定義域とする関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (\ x \ne 2 \text{ のとき}) \\ 4 & (\ x = 2 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

f の定積分 $\int_{\frac{\pi}{6}}^3 f(x)\,dx$ を計算しなさい．

例題　関数 f について，$3<x<7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とする．定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する．

$3 \le x \le 7$ となる実数 x について，$x \ne 3$ ，$x \ne 7$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{x}$ なので，定理 6.9.4 より $\displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx$ ．従って，

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln\frac{7}{3} \ .$$

終

問題 6.9.3　関数 g について，$0<x<3$ のとき $g(x)=\dfrac{2}{x^2+3}$ とします．定積分 $\int_0^3 g(x)\,dx$ を計算しなさい．

例題　実数 $[0,9]$ を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}} & (\ 0 \le x \le 2 \text{ のとき}) \\ \sqrt{x} & (\ 2 < x \le 9 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_0^9 \psi(x)\,dx$ を計算する．

〔解説〕　定理 6.9.2 より $\int_0^9 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \psi(x)\,dx + \int_2^9 \psi(x)\,dx$ ．$\int_0^2 \psi(x)\,dx$ と $\int_2^9 \psi(x)\,dx$ とに分けて計算する．

$0 \le x \le 2$ となる実数 x について $\psi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ なので，

$$\int_0^2 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \left[\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^2 = \sin^{-1}\frac{2}{3} - \sin^{-1}0 = \sin^{-1}\frac{2}{3} \ .$$

$2 \le x \le 9$ となる実数 x について $x \ne 2$ のとき $f(x)=\sqrt{x}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_2^9 \psi(x)\,dx &= \int_2^9 \sqrt{x}\,dx = \int_2^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_2^9 = \frac{2}{3}\Big[x\sqrt{x}\Big]_2^9 = \frac{2}{3}\big(9\sqrt{9}-2\sqrt{2}\big)\\ &= 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \ .\end{aligned}$$

従って，

$$\int_0^9 \psi(x)\,dx = \int_0^2 \psi(x)\,dx + \int_2^9 \psi(x)\,dx = \sin^{-1}\frac{2}{3} + 18 - \frac{4}{3}\sqrt{2} \ .$$

終

問題 6.9.4　実数 $[1,9]$ を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{6}{x^2} & (\ 1 \le x < 3 \text{ のとき}) \\ \dfrac{4}{x} & (\ 3 \le x \le 9 \text{ のとき}) \end{cases} \ .$$

定積分 $\int_1^9 \varphi(x)\,dx$ を計算しなさい．

定積分はリーマン和の極限値ですから，リーマン和の極限値を計算するために定積分を用いることがあります．

例題　数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ を次のように定める：正の各自然数 n に対して $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{3+\frac{5}{n}k}$ ．定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ の極限値を計算する．

正の自然数 n に対して，$x_k = 3+\dfrac{5}{n}k$ （ $k=0,1,2,3,\ldots,n$ ）とおく．自然数 $k=1,2,3,\ldots,n$ について

$$x_k - x_{k-1} = 3+\frac{5}{n}k - \left\{3+\frac{5}{n}(k-1)\right\} = \frac{5}{n} \ .$$

数列 $\{x_k\}_{0\le k\le n}$ は公差 $\dfrac{5}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = 8 \ .$$

$x_k - x_{k-1} = \dfrac{5}{n}$ より $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{5}$ なので，

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sqrt{3+\frac{5}{n}k} = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{3+\frac{5}{n}k}\,\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{x_k}\,\frac{x_k-x_{k-1}}{5}\right)\\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^n \left\{\sqrt{x_k}\,(x_k-x_{k-1})\right\} \ .\end{aligned}$$

ここで $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left\{\sqrt{x_k}\,(x_k-x_{k-1})\right\}$ は関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和である．

$$\max\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1\,,\,x_3-x_1\,,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\} = \frac{5}{n} \ ;$$

この値は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．よって，$n\to\infty$ のとき関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left\{\sqrt{x_k}\,(x_k-x_{k-1})\right\}$ の極限値は定積分 $\int_3^8 \sqrt{x}\,dx$ である．故に

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S_n &= \frac{1}{5}\int_3^8 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_3^8 = \frac{2}{15}\big(8\sqrt{8}-3\sqrt{3}\big)\\ &= \frac{32\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{15} \ .\end{aligned}$$

終

問題 6.9.5　数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \dfrac{6}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{5+\frac{3}{n}k}$ ．定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ の極限値を計算しなさい．

問題 6.9.6　数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ を次のように定めます：正の各自然数 n に対して $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{8}{3n+4k}$ ．定積分を用いて数列 $\{S_n\}_{n\ge1}$ の極限値を計算しなさい．

——— 定理の証明

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，定数 k に対して関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり，$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1\,,\,x_3-x_2\,,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく；S_n は関数 $f(x)$ の，T_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和である．このとき，

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = k\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = kS_n \ .$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする．関数 $f(x)$ は実数 a から実数 b まで積分可能なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ．故に，

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty}(kS_n) = k\lim_{n\to\infty} S_n = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり，$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとする．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1\,,\,x_3-x_2\,,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

$$U_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

とおく；S_n は関数 $f(x)$ の，T_n は関数 $g(x)$ の，U_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和である．このとき，

$$\begin{aligned}U_n &= \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]\\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1}) + g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\}\\ &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\}\\ &= S_n + T_n \ .\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする．関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a から実数 b まで積分可能なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ．故に，

$$\begin{aligned}\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx &= \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}(S_n+T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n\\ &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .\end{aligned}$$

（証明終り）

定理 6.9.3 を証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとき，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ ならば，$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ ．

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f,g は a から b まで積分可能であるとする．更に，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ とする．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0\,,\,x_2-x_1\,,\,x_3-x_2\,,\,\ldots,\,x_n-x_{n-1}\} \ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく；S_n は関数 f の，T_n は関数 g のリーマン和である．$k=1,2,3,\ldots,n$ に対して，ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので仮定より $f(\xi_k) \le g(\xi_k)$ ，更に $x_{k-1} \le x_k$ より $x_k - x_{k-1} \ge 0$ なので，

$$f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1}) \le g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1}) \ ;$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\} \le \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)\,(x_k-x_{k-1})\}$$

つまり $S_n \le T_n$ ．

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とする．正の各自然数 n について $S_n \le T_n$ なので，定理 5.6.3 より

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} T_n \ .$$

関数 f,g は実数 a から実数 b まで積分可能なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ；故に $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$ ．

（証明終り）