§6.9　定積分の性質

定積分に関する定理を幾つか述べます.

定理 6.9.1　k は定数とする． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $kf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$ も a から b まで積分可能であり,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \ ,$$
$$\int_a^b \{f(x)\pm g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \quad （複号同順） .$$

後でこの定理の一部を証明します.

例題　定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx$ を計算する.

〔解説〕

$$\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \frac{1}{7}\int_0^2 (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int_0^2 6x^2dx + \int_0^2 \cos x\,dx\Big)$$
$$= \frac{1}{7}\Big(6\int_0^2 x^2dx + \big[\sin x\big]_0^2\Big) = \frac{1}{7}\Big(6\Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^2 + \sin 2 - \sin 0\Big)$$
$$= \frac{16+\sin 2}{7} \ .$$

不定積分を計算してもよい． 積分定数を C とおくと,

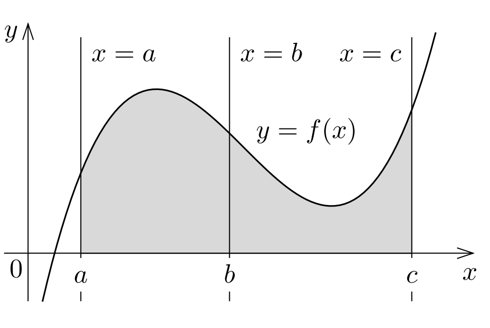
$$\int \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \frac{1}{7}\int (6x^2+\cos x)\,dx = \frac{1}{7}\Big(\int 6x^2dx + \int \cos x\,dx\Big)$$
$$= \frac{1}{7}\Big(6\int x^2dx + \sin x\Big) = \frac{1}{7}\Big(6\cdot\frac{1}{3}x^3 + \sin x\Big) + C$$
$$= \frac{2x^3+\sin x}{7} + C \ ,$$

$$\int_0^2 \frac{6x^2+\cos x}{7}\,dx = \Big[\frac{2x^3+\sin x}{7}\Big]_0^2 = \frac{2\cdot 8+\sin 2}{7} - \frac{0+\sin 0}{7}$$
$$= \frac{16+\sin 2}{7} \ .$$

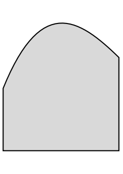
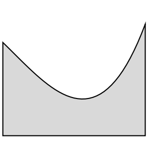
終

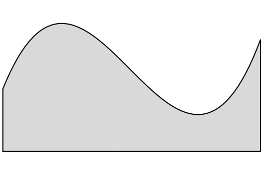
問題 6.9.1　以下の定積分を計算しなさい.

(1) $\int_2^0 (5x^3-3e^x)\,dx$.　　(2) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x-3\sin x}{5}\,dx$.



実数 a,b,c について $a \le b \le c$ とします． また，関数 f は a から c まで積分可能で，区間 $[a,c]$ の各実数 x で $f(x) \ge 0$ とします． 右図のように，xy 座標平面において， $y=f(x)$ のグラフと直線 $x=a$ と $x=c$ と x 軸とで囲まれる領域を，直線 $x=b$ で仕切ります． 6.2 節で述べたように次のことが成り立ちます：

領域  の面積は $\int_a^b f(x)\,dx$ ，　領域  の面積は $\int_b^c f(x)\,dx$ ，

この 2 つの領域を併せた領域  の面積は $\int_a^c f(x)\,dx$.

このことから次の等式が成り立つことが分かります：

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \ .$$

実は，この等式は，実数 a,b,c の大小関係に関わらず成り立ちます． 後に一部を証明します.

定理 6.9.2　実数 a,b,c に対して，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき，f は a から c まで積分可能であり,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

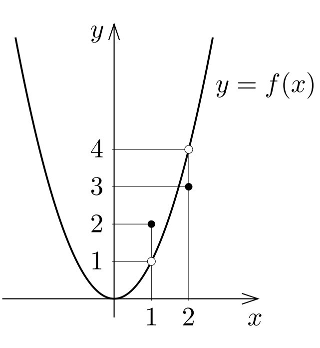
次の定理が成り立ちます． その証明は後にします.

定理 6.9.3　実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f と g とは a から b まで積分可能であるとする． 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

例解　関数 f を次のように定めます：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & （\ x \ne 1 \ かつ\ x \ne 2 \ のとき） \\ 2 & （\ x = 1 \ のとき） \\ 3 & （\ x = 2 \ のとき） \end{cases} .$$



$x=1$ のときと $x=2$ のときだけ $f(x) \ne x^2$ ですが，それ以外のときは $f(x)=x^2$ です． このようなとき，定積分 $\int_0^3 f(x)\,dx$ と $\int_0^3 x^2\,dx$ とは同じ値になります：

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 x^2\,dx = \Big[\frac{1}{3}x^3\Big]_0^3 = \frac{1}{3}3^3 - 0 = 9 \ .$$

終

一般的にいうと次のようになります：関数 f が a から b まで積分可能であるとき，関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数 $c_1,c_2,c_3,\dots,c_n$ を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば，つまり， $a \le x \le b$ となる実数 x について $x \ne c_1$, $x \ne c_2$, $x \ne c_3$, $\cdots$, $x \ne c_n$ のとき $g(x)=f(x)$ ならば， $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ ． 証明は省略します.

定理 6.9.4　実数 a と b とについて $a \le b$ で，関数 f は a から b まで積分可能であるとする． 関数 g について，区間 $[a,b]$ の有限個の実数を除く $[a,b]$ の各実数 x について $g(x)=f(x)$ ならば， g は a から b まで積分可能であり， $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

例題　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} 3^x & （\ x \ne 2 \ のとき） \\ 5 & （\ x = 2 \ のとき） \end{cases} .$$

g の定積分 $\int_0^4 g(x)\,dx$ を計算する.

$0 \le x \le 4$ である各実数 x について $x \ne 2$ のとき $g(x)=3^x$ なので，定理 6.9.4 により $\int_0^4 g(x)\,dx = \int_0^4 3^x\,dx$ ． $\int_0^4 3^x\,dx$ を計算する：

$$\int_0^4 3^x\,dx = \Big[\frac{e^x}{\ln 3}\Big]_0^4 = \frac{e^4-1}{\ln 3} \ .$$

故に $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,dx = \frac{e^4-1}{\ln 3}$.

終

問題 6.9.2　実数全体を定義域とする関数 g を次のように定める：

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2x^2+6} & （\ x \ne 2 \ のとき） \\ 7 & （\ x = 2 \ のとき） \end{cases} .$$

定積分 $\int_1^3 g(x)\,dx$ を計算しなさい.

例題　関数 f について， $3 < x < 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とする． 定積分 $\int_3^7 f(x)\,dx$ を計算する.

$3 \le x \le 7$ である各実数 x について， $x \ne 3$, $x \ne 7$ のとき $f(x) = \dfrac{1}{x}$ なので，定理 6.9.4 より $\displaystyle\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx$ ． よって,

$$\int_3^7 f(x)\,dx = \int_3^7 \frac{1}{x}\,dx = \big[\ln x\big]_3^7 = \ln 7 - \ln 3 = \ln\frac{7}{3} \ .$$

終

問題 6.9.3　関数 f について， $0 < x < \dfrac{3}{2}$ のとき $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{6-2x^2}}$ とします． 定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$ を計算しなさい.

例題　実数全体を定義域とする関数 ψ を次のように定める：

$$\psi(x) = \begin{cases} \cos x & （\ x \le 5 \ のとき） \\ \sin 5 & （\ x > 5 \ のとき） \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する.

〔解説〕　定理 6.9.2 より $\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ ． $\int_0^5 \psi(x)\,dx$ 及び $\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx$ を計算する． $0 \le x \le 5$ である各実数 x について $\psi(x) = \cos x$ なので,

$$\int_0^5 \psi(x)\,dx = \int_0^5 \cos x\,dx = \big[\sin x\big]_0^5 = \sin 5 - \sin 0 = \sin 5 \ .$$

$5 \le x \le 2\pi$ である実数 x について $x \ne 5$ のとき $f(x) = \sin 5$ なので,

$$\int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_5^{2\pi} \sin 5\,dx = (\sin 5)\int_5^{2\pi} 1\,dx = (\sin 5)\big[x\big]_5^{2\pi} = (2\pi-5)\sin 5 \ .$$

従って,

$$\int_0^{2\pi} \psi(x)\,dx = \int_0^5 \psi(x)\,dx + \int_5^{2\pi} \psi(x)\,dx = \sin 5 + (2\pi-5)\sin 5$$
$$= (2\pi-4)\sin 5 \ .$$

終

問題 6.9.4　実数全体を定義域とする関数 φ を次のように定めます：

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & （\ x \le 2 \ のとき） \\ \cos 2 & （\ x > 2 \ のとき） \end{cases} .$$

定積分 $\int_0^\pi \varphi(x)\,dx$ を計算しなさい.

変数 x の関数 $f(x)$ の絶対値 $|f(x)|$ の定積分を計算するためには， $f(x) \ge 0$ である x の値の範囲と $f(x) \le 0$ である x の値の範囲とに分けて定積分します.

例題　定積分 $\int_0^3 |e^x-5|\,dx$ を計算する.

〔解説〕　$0 \le x \le 3$ である実数 x について， $e^x-5=0$ とすると $x = \ln 5$ ． $0 \le x \le \ln 5$ のとき， $e^x \le 5$ ， $e^x-5 \le 0$ ， $|e^x-5| = 5-e^x$ ． $\ln 5 \le x \le 3$ のとき， $e^x \ge 5$ ， $e^x-5 \ge 0$ ， $|e^x-5| = e^x-5$ ． これより,

$$\int_0^3 |e^x-5|\,dx = \int_0^{\ln 5} (5-e^x)\,dx + \int_{\ln 5}^3 (e^x-5)\,dx = [5x-e^x]_0^{\ln 5} + [e^x-5x]_{\ln 5}^3$$
$$= 5\ln 5 - e^{\ln 5} + e^0 + e^3 - 15 - e^{\ln 5} + 5\ln 5$$
$$= 5\ln 5 - 5 + 1 + e^3 - 15 - 5 + 5\ln 5$$
$$= e^3 + 10\ln 5 - 24 \ .$$

終

問題 6.9.5　定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \Big|\cos x - \frac{1}{2}\Big|\,dx$ を計算しなさい.

——— 定理の証明

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，定数 k に対して関数 $kf(x)$ も a から b まで積分可能であり， $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ が実数 a から実数 b まで積分可能であるとする.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり， T_n は関数 $kf(x)$ のリーマン和である． このとき,

$$T_n = \sum_{k=1}^n \{kf(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = k\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = kS_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする． 関数 $f(x)$ は実数 a から実数 b まで積分可能なので $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ． 故に,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} (kS_n) = k\lim_{n\to\infty} S_n = k\int_a^b f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.1 のうち次のことを証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，関数 $f(x)+g(x)$ も a から b まで積分可能であり， $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが実数 a から実数 b まで積分可能であるとする.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$
$$U_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})] \ ,$$

とおく； S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和であり，T_n は関数 $g(x)$ のリーマン和であり， U_n は関数 $f(x)+g(x)$ のリーマン和である． このとき,

$$U_n = \sum_{k=1}^n [\{f(\xi_k)+g(\xi_k)\}(x_k-x_{k-1})]$$
$$= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) + g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} + \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$= S_n + T_n \ .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする． 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは実数 a から実数 b まで積分可能なので， $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ， $\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ． 故に,

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}\,dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} (S_n+T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.2 の一部を大雑把に証明します：実数 a,b,c について $a \le b \le c$ であり，関数 f が a から b まで積分可能でかつ b から c まで積分可能であるとき， f は a から c まで積分可能であり,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

証明　正の各実数 n に対して,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

とおく． S_n は関数 $f(x)$ のリーマン和である． 次のような正の自然数 l をとる： $l < n$ で,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{l-1} \le \xi_l \le x_l \le b \ ,$$
$$b \le \xi_{l+1} \le x_{l+1} \le \xi_{l+2} \le x_{l+2} \le \xi_{l+3} \le x_{l+3} \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = c \ .$$

$m = n-l$ とおき， x_l を b に入れ替えることとして

$$T_l = \sum_{k=1}^l \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$
$$U_m = \sum_{k=l+1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = \sum_{j=1}^m \{f(\xi_{l+j})(x_{l+j}-x_{l+j-1})\}$$

とおく． T_l は近似的に a 以上 b 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和であり，U_m は近似的に b 以上 c 以下の範囲の関数 $f(x)$ のリーマン和である.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^l \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} + \sum_{k=l+1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$
$$= T_l + U_m \ .$$

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする． 関数 $f(x)$ が a から b まで積分可能でありかつ b から c まで積分可能であるので,

$$\lim_{l\to\infty} T_l = \int_a^b f(x)\,dx \ , \qquad \lim_{m\to\infty} U_m = \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

$S_n = T_l + U_m$ なので,

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{l,m\to\infty} (T_l+U_m) = \lim_{l\to\infty} T_l + \lim_{m\to\infty} U_m$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \ .$$

（証明終り）

定理 6.9.3 を証明します：実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f と g とが a から b まで積分可能であるとき，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ ならば， $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

証明　実数 a,b について $a \le b$ で，関数 f,g は a から b まで積分可能であるとする． 更に，区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ とする.

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0,x_1,x_2,x_3,\dots,x_{n-1},x_n$ 及び $\xi_1,\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ をとり,

$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\} \ ,$$
$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ , \qquad T_n = \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \ ,$$

とおく； S_n は関数 f のリーマン和であり， T_n は関数 g のリーマン和である． $k=1,2,3,\dots,n$ に対して， ξ_k は区間 $[a,b]$ に属すので仮定より $f(\xi_k) \le g(\xi_k)$ ，更に $x_{k-1} \le x_k$ より $x_k - x_{k-1} \ge 0$ なので,

$$f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \le g(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \ ;$$

よって

$$\sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\} \le \sum_{k=1}^n \{g(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\}$$

つまり $S_n \le T_n$.

$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とする． 正の各自然数 n について $S_n \le T_n$ なので，定理 5.6.3 より

$$\lim_{n\to\infty} S_n \le \lim_{n\to\infty} T_n \ .$$

関数 f,g は実数 a から実数 b まで積分可能なので， $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx$ ， $\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b g(x)\,dx$ ；故に $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

（証明終り）