

## 第6章の補遺2 関数の値の平均

例として正弦関数  $\sin x$  の値の  $0$  以上の  $\pi$  以下の区間の“平均”を考えます。正の自然数を表す変数  $n$  に対して、等差数列を成す  $n$  個の実数

$$\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{n}, \frac{n\pi}{n} = \pi$$

の各々に対する正弦関数の値

$$\sin \frac{\pi}{n}, \sin \frac{2\pi}{n}, \sin \frac{3\pi}{n}, \sin \frac{4\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)\pi}{n}, \sin \pi$$

を合計して  $n$  で割った値

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{3\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} + \sin \pi}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}}{n}$$

が近似的に正弦関数  $\sin x$  の値の  $0$  以上の  $\pi$  以下の区間の平均だと考えます；そして

$n \rightarrow \infty$  のとき  $\frac{\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}}{n}$  が収束するならば、極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}}{n}$  が関数  $\sin x$  の値の  $0$  以上の  $\pi$  以下の区間の平均であると考えます。自然数  $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$  に対して  $x_k = \frac{\pi k}{n}$  とおきます。

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = \pi.$$

数列  $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$  は公差が  $\frac{\pi}{n}$  の等差数列なので、

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{\pi}{n},$$

これは  $n \rightarrow \infty$  のとき  $0$  に収束します。自然数  $k=1, 2, 3, \dots, n$  について、

$$x_k - x_{k-1} = \frac{\pi}{n} \quad \text{なので} \quad \frac{1}{n} = \frac{x_k - x_{k-1}}{\pi}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}}{n} &= \sum_{k=1}^n \left( \sin x_k \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sin x_k \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{\pi} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sin x_k}{\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\}. \end{aligned}$$

これは関数  $\frac{\sin x}{\pi}$  のリーマン和です。関数  $\frac{\sin x}{\pi}$  は積分可能なので、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sin x_k}{\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} &= \int_0^\pi \frac{\sin x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \{-\cos \pi - (-\cos 0)\} = \frac{1}{\pi} \{-(-1) - (-1)\} \\ &= \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

故に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sin \frac{\pi k}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\sin x_k}{\pi} (x_k - x_{k-1}) \right\} = \frac{2}{\pi}.$$

正弦関数  $\sin x$  の値の  $0$  以上の  $\pi$  以下の区間の平均は  $\frac{2}{\pi}$  です。

一般的に、実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  であり、関数  $f$  が  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとき、 $a$  以上  $b$  以下の区間  $[a, b]$  における  $f$  の値の平均は  $\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a}$  になります。