

## 第6章の補遺2 もう一つの微分積分の基本定理

微分積分の基本定理によると、関数  $F$  が微分可能でその導関数が連続であるとき、

$$\int_a^b \left\{ \frac{d}{dx} F(x) \right\} dx = F(b) - F(a) ;$$

つまり、大雑把にいうと、関数  $F$  を微分したものを定積分したものは元の関数  $F$  の値で計算できます。

逆に、関数を定積分したものを微分することを考えます。実数  $a$  が属す区間  $I$  において関数  $f$  が連続であるとき、 $I$  の実数を表す変数  $x$  に対して定積分  $\int_a^x f(t) dt$  は  $x$  の関数です；この関数  $\int_a^x f(t) dt$  について次のことが成り立ちます：

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x) .$$

つまり、大雑把にいうと、関数  $f$  を  $x$  まで定積分したものを  $x$  で微分すると元の関数に戻ります。このことも微分積分の基本定理といいます。正確に述べると次の定理になります。

**定理** (微分積分の基本定理) 実数  $a$  が属す区間  $I$  において関数  $f$  が連続であるとする。関数  $F$  を、 $I$  の各実数  $x$  に対して  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  と定めると、 $I$  の各実数  $x$  において  $F$  は微分可能で  $F'(x) = f(x)$  .

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $F$  を  $F(x) = \int_0^x \sin t dt$  と定める。  $F$  の導関数  $F'$  を求める。

微分積分の基本定理より、

$$F'(x) = \frac{d}{dx} F(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sin t dt = \sin x . \quad \text{終}$$

**問題 6.補遺2.1** 区間  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $F$  を  $F(x) = \int_1^x \ln t dt$  ( $x > 0$ ) と定めます。  $F$  の導関数  $F'$  を求めなさい。

**問題 6.補遺2.2** 実数全体を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \int_\pi^x \cos t^2 dt$  と定めます。  $f$  の導関数  $f'$  を求めなさい。

**例題** 実数全体を定義域とする関数  $G$  を  $G(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^3+1} dt$  と定める。  $G$  の導関数  $G'$  を求める。

$y = x^2$  において合成関数の微分法を用いる。

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{d}{dx} G(x) = \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{t^3+1} dt = \frac{d}{dx} \int_0^y \sqrt{t^3+1} dt \\ &= \frac{d}{dy} \int_0^y \sqrt{t^3+1} dt \cdot \frac{dy}{dx} = \sqrt{y^3+1} \cdot \frac{d}{dx} x^2 = \sqrt{(x^2)^3+1} \cdot 2x \\ &= 2x \sqrt{x^6+1} . \quad \text{終} \end{aligned}$$

**問題 6.補遺2.3** 正の実数の全体  $(0, \infty)$  を定義域とする関数  $f$  を  $f(x) = \int_0^{\ln x} te^t dt$  ( $x > 0$ ) と定めます。  $f$  の導関数  $f'$  を求めなさい。

上述の微分積分の基本定理を証明します。但し、以下に述べるのは大雑把な証明です。

関数  $f$  は実数  $a$  が属す区間  $I$  において連続であるとします。関数  $F$  を

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

と定めます。変数  $h$  について  $h > 0$  とします。定理 6.9.2 より

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt . \end{aligned} \quad (1)$$

区間  $[x, x+h]$  における関数  $f$  の最大値を  $G_h$  と、最小値を  $L_h$  とおきます<sup>8)</sup>。  $x \leq t \leq x+h$  となる実数  $t$  について

$$L_h \leq f(t) \leq G_h ,$$

従って定理 6.9.3 より

$$\int_x^{x+h} L_h dt \leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \int_x^{x+h} G_h dt .$$

$\int_x^{x+h} L_h dt = hL_h$  ,  $\int_x^{x+h} G_h dt = hG_h$  なので、

$$\begin{aligned} hL_h &\leq \int_x^{x+h} f(t) dt \leq hG_h , \\ L_h &\leq \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} \leq G_h . \end{aligned}$$

等式 (1) より

$$L_h \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq G_h .$$

ここで  $h \rightarrow +0$  とします。  $L_h$  は区間  $[x, x+h]$  における連続関数  $f$  の最小値ですから  $\lim_{h \rightarrow +0} L_h = f(x)$  ;  $G_h$  は区間  $[x, x+h]$  における連続関数  $f$  の最大値ですから  $\lim_{h \rightarrow +0} G_h = f(x)$  . 従って、1.4 節で述べた挟みうちの定理と同様にして

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) .$$

同様に

$$\lim_{h \rightarrow -0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) .$$

故に、定理 3.4 より、

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) .$$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x)$  なので、  $F'(x) = f(x)$  . こうして微分積分の基本定理が証明されました。

<sup>8)</sup> ここで次の定理を用いています：  $a \leq b$  となる実数  $a, b$  に対して、関数  $f$  が区間  $[a, b]$  において連続であるとき、  $[a, b]$  における  $f$  の最大値と最小値とがある。