第6章の補遺2　もう一つの微分積分の基本定理

微分積分の基本定理によると，関数 F が微分可能でその導関数が連続であるとき，

$$\int_a^b \left\{\frac{d}{dx}F(x)\right\} dx = F(b)-F(a) \ ;$$

つまり，大雑把にいうと，関数 F を微分したものを定積分したものは元の関数 F の値で計算できます．

逆に，関数を定積分したものを微分することを考えます．実数 a が属す区間 I において関数 f が連続であるとき，I の実数を表す変数 x に対して定積分 $\int_a^x f(t)\,dt$ は x の関数です；この関数 $\int_a^x f(t)\,dt$ について次のことが成り立ちます：

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \ .$$

つまり，大雑把にいうと，関数 f を x まで定積分したものを x で微分すると元の関数に戻ります．このことも微分積分の基本定理といいます．正確に述べると次の定理になります．

定理（微分積分の基本定理）　実数 a が属す区間 I において関数 f が連続であるとする．関数 F を，I の各実数 x に対して $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ と定めると，I の各実数 x において F は微分可能で $F'(x)=f(x)$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_0^x \sin t\,dt$ と定める．F の導関数 F' を求める．

微分積分の基本定理より，

$$F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin t\,dt = \sin x \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 6.補遺2.1}}$　区間 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 F を $F(x)=\int_1^x \ln t\,dt$ （ $x>0$ ）と定めます．F の導関数 F' を求めなさい．

$\boxed{\text{問題 6.補遺2.2}}$　実数全体を定義域とする関数 f を $f(x)=\int_\pi^x \cos t^2\,dt$ と定めます．f の導関数 f' を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　実数全体を定義域とする関数 G を $G(x)=\int_0^{x^2}\sqrt{t^3+1}\,dt$ と定める．G の導関数 G' を求める．

$y=x^2$ とおいて合成関数の微分法を用いる．

$$\begin{aligned}G'(x)&=\frac{d}{dx}G(x)=\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\sqrt{t^3+1}\,dt=\frac{d}{dx}\int_0^{y}\sqrt{t^3+1}\,dt\\&=\frac{d}{dy}\int_0^{y}\sqrt{t^3+1}\,dt\cdot\frac{dy}{dx}=\sqrt{y^3+1}\cdot\frac{d}{dx}x^2=\sqrt{(x^2)^3+1}\cdot 2x\\&=2x\sqrt{x^6+1} \ . \qquad \boxed{\text{終}}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 6.補遺2.3}}$　正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\int_0^{\ln x} te^t\,dt$ （ $x>0$ ）と定めます．f の導関数 f' を求めなさい．

上述の微分積分の基本定理を証明します．但し，以下に述べるのは大雑把な証明です．

関数 f は実数 a が属す区間 I において連続であるとします．関数 F を

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

と定めます．変数 h について $h>0$ とします．定理6.9.2より

$$\begin{aligned}F(x+h)-F(x)&=\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt=\int_a^{x+h}f(t)\,dt+\int_x^a f(t)\,dt\\&=\int_x^{x+h}f(t)\,dt \ . \qquad (1)\end{aligned}$$

区間 $[x,x+h]$ における関数 f の最大値を G_h と，最小値を L_h とおきます[8)]．$x\le t\le x+h$ となる実数 t について

$$L_h \le f(t) \le G_h \ ,$$

従って定理6.9.3より

$$\int_x^{x+h}L_h\,dt \le \int_x^{x+h}f(t)\,dt \le \int_x^{x+h}G_h\,dt \ .$$

$\int_x^{x+h}L_h\,dt=hL_h$ ，$\int_x^{x+h}G_h\,dt=hG_h$ なので，

$$hL_h\le\int_x^{x+h}f(t)\,dt\le hG_h \ ,$$

$$L_h\le\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}\le G_h \ .$$

等式 (1) より

$$L_h\le\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\le G_h \ .$$

ここで $h\to+0$ とします．L_h は区間 $[x,x+h]$ における連続関数 f の最小値ですから $\lim_{h\to+0}L_h=f(x)$ ；G_h は区間 $[x,x+h]$ における連続関数 f の最大値ですから $\lim_{h\to+0}G_h=f(x)$ ．従って，1.4節で述べた挟みうちの定理と同様にして

$$\lim_{h\to+0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \ .$$

同様に

$$\lim_{h\to-0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \ .$$

故に，定理3.4より，

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x) \ .$$

$\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=F'(x)$ なので，$F'(x)=f(x)$ ．こうして微分積分の基本定理が証明されました．

[8)] ここで次の定理を用いています：$a\le b$ となる実数 a,b に対して，関数 f が区間 $[a,b]$ において連続であるとき，$[a,b]$ における f の最大値と最小値とがある．