

§ 7.0 微分

変数の微分という新しい概念を考えます. 独立変数¹⁾ x の微分とは新しい一つの変数 dx のことです. 独立変数 x の微分 dx について $dx \neq 0$ とします. また, 独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して, $\varphi(x)$ の微分 $d\varphi(x)$ を次のように定義します:

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx .$$

従って, 従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおくと, y の微分 dy は次のようになります:

$$dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)dx .$$

独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおきます. このとき, 微分係数 $\frac{dy}{dx}$ は次のようになりました:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \varphi'(x) .$$

つまり, $\frac{dy}{dx}$ は, 分数と同じ形をしていますが, 商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の極限值であって商ではありません. しかし, 変数 x の微分 dx と変数 y の微分 dy とを考えると, 微分係数 $\frac{dy}{dx}$ はあたかも dy を dx で割るときの商であるかのように扱えます. このことを述べたのが次の定理です.

定理 独立変数 x 及び微分可能な関数 φ に対して, 従属変数 y を $y = \varphi(x)$ とおくと, 関数 f と g 及び微分係数 $\frac{dy}{dx}$, 変数 x の微分 dx , 変数 y の微分 dy について,

$$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x) \iff g(y)dy = f(x)dx .$$

証明 $y = \varphi(x)$ なので,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x) , \quad dy = d\varphi(x) = \varphi'(x)dx .$$

$g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$ とする. $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$ なので $g(y)\varphi'(x) = f(x)$; 両辺に dx を掛けると $g(y)\varphi'(x)dx = f(x)dx$; $\varphi'(x)dx = dy$ なので, $g(y)dy = f(x)dx$.

逆に $g(y)dy = f(x)dx$ とする. $dy = \varphi'(x)dx$ なので, $g(y)\varphi'(x)dx = f(x)dx$; 独立変数 x について $dx \neq 0$ なので, $g(y)\varphi'(x) = f(x)$; $\varphi'(x) = \frac{dy}{dx}$ なので, $g(y) \frac{dy}{dx} = f(x)$. (証明終り)

¹⁾ 関数 φ に対して $y = \varphi(x)$ となる変数 x, y を考えるとき, x を独立変数と, y を従属変数といいました. 独立変数の値は私達が自由に決めることができますが, 独立変数の値を決めると従属変数の値は自動的に決まってしまう.