§7.3　部分積分法

関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとします． $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ （ C は積分定数） とします． 定理6.5.2より

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\Big\{\int g(x)\,dx - C\Big\} = \frac{d}{dx}\Big\{\int g(x)\,dx\Big\} = g(x)\ .$$

関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x) + f(x)\,\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)\ .$$

従って，定理6.7より，

$$\begin{aligned}\int\Big[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\Big]dx &= \int\{f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)\}\,dx\\ &= \int f'(x)\,G(x)\,dx + \int f(x)\,g(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

この等式の左辺は定理6.5.3より $\int\Big[\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\}\Big]dx = f(x)\,G(x) + D$ （ D は積分定数） ですから，

$$\begin{aligned}f(x)\,G(x) + D &= \int f(x)\,g(x)\,dx + \int f'(x)\,G(x)\,dx\ ,\\ \int f(x)\,g(x)\,dx &= f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx + D\ ,\end{aligned}$$

この等式の右辺の積分定数 D を不定積分の式 $\int f'(x)\,G(x)\,dx$ に含めると，

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

こうして次のことが分かります： $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ （ C は積分定数） とすると $\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx$ ． ここで， $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ における積分定数 C は，以後の計算に現れないので省略してもかまいません．

> **定理**（不定積分の部分積分法）　関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとする． 関数 f,g,G について，
>
> $$\int g(x)\,dx = G(x)\quad とすると\quad \int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int f'(x)\,G(x)\,dx\ ;$$
>
> ここで不定積分 $\int g(x)\,dx = G(x)$ の計算では積分定数を略してよい．

この公式を用いる積分計算法を部分積分法といいます． 公式の成り立ちを覚えて下さい： 関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき， $g(x)$ の不定積分 $\int g(x)\,dx = G(x)$ に対して，

そのまま　　微分する

$$\int\boxed{f(x)}\,\boxed{g(x)}\,dx = \boxed{f(x)}\,\boxed{G(x)} - \int\boxed{f'(x)}\,\boxed{G(x)}\,dx\ .$$

積分する　　そのまま

例題　不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 積分定数を略すと $\int\cos x\,dx = \sin x$ ， また $\frac{d}{dx}x = 1$ なので，部分積分法の公式に当てはめると，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int 1\sin x\,dx = x\sin x - \int\sin x\,dx\\ &= x\sin x + \cos x + C_1\ ,\end{aligned}$$

ここで C_1 は積分定数である． 更にこの結果を用いて $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する． 積分定数を略すと $\int\sin x\,dx = -\cos x$ ， また $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$ なので，部分積分法の公式に当てはめると，

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx\\ &= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C_2\\ &= 2x\sin x + (2-x^2)\cos x + C_2\ ,\end{aligned}$$

ここで C_2 は積分定数である．　終

問題 7.3.1　不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を計算しなさい． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を計算しなさい．

問題 7.3.2　不定積分 $\int xe^x\,dx$ を計算しなさい． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2e^x\,dx$ を計算しなさい．

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとします． 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために， $f(x) = f(x)\cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用します： 積分定数を略すと $\int 1\,dx = x$ ですから，

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,1\,dx = f(x)\,x - \int f'(x)\,x\,dx = x\,f(x) - \int x\,f'(x)\,dx\ .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれます： $\int 1\,dx = x$ ， $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\ln x\,dx &= \int(\ln x)\,1\,dx = (\ln x)\,x - \int\frac{1}{x}\,x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx\\ &= x\ln x - x + C\ .\end{aligned}$$

> （積分公式）
>
> $$\int\ln x\,dx = x\ln x - x + C\quad（\ C\ は積分定数）．$$

例題　不定積分 $\int\ln(3y+2)\,dy$ を計算する．

$z = 3y+2$ とおく． $\frac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \frac{1}{3}\,dz$ ． よって，積分定数を C_0, C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\ln(3y+2)\,dy &= \int(\ln z)\,\frac{1}{3}\,dz = \frac{1}{3}(z\ln z - z) + C_0\\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2)\ln(3y+2) - 3y - 2\}C_0\\ &= \Big(y + \frac{2}{3}\Big)\ln(3y+2) - y + C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.3　不定積分 $\int\ln(4u+7)\,du$ を計算しなさい．

例題　不定積分 $\int y\ln y\,dy$ を計算する．

$\int y\ln y\,dy = \int(\ln y)y\,dy$ と変形してから部分積分法の公式を適用する． 積分定数を略すと $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2$ ， また $\frac{d}{dy}\ln y = \frac{1}{y}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int y\ln y\,dy &= \frac{1}{2}y^2\ln y - \int\frac{1}{2}y^2\frac{1}{y}\,dy\\ &= \frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{2}\int y\,dy = \frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{2}\frac{1}{2}y^2 + C\\ &= y^2\Big(\frac{\ln y}{2} - \frac{1}{4}\Big) + C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.4　不定積分 $\int x^3\ln x\,dx$ を計算しなさい．

例題　不定積分 $\int x\sin 3x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y = 3x$ とおく． $\frac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3}\,dy$ ． 積分定数を略すと，

$$\begin{aligned}\int\sin 3x\,dx &= \int\sin y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3}\cos 3x\ ,\\ \int\cos 3x\,dx &= \int\cos y\,\frac{1}{3}\,dy = \frac{1}{3}\sin y = \frac{1}{3}\sin 3x\ .\end{aligned}$$

また $\frac{d}{dx}x = 1$ なので，部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int x\sin 3x\,dx &= -\frac{1}{3}x\cos 3x - \Big(-\frac{1}{3}\int 1\cdot\cos 3x\,dx\Big)\\ &= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C\\ &= \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{x}{3}\cos 3x + C\ .\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である．　終

問題 7.3.5　不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算しなさい．

問題 7.3.6　不定積分 $\int xe^{\frac{x}{3}}\,dx$ を計算しなさい．

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算します．

例題　定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する．

まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C\\ &= x\sin x + \cos x + C\ .\end{aligned}$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \big[x\sin x + \cos x\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi - (0\sin 0 + \cos 0)\\ &= \frac{\pi}{2} - 1\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.3.7　定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt$ を計算しなさい．

――― 定積分の部分積分法

定理（定積分の部分積分法）　実数 a, b が属するある区間において，関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとする． 関数 f, g, G について，

$$\int g(x)\,dx = G(x)\quad とすると\quad \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx\ .$$

証明　関数 G について $G(x) = \int g(x)\,dx$ とする． 定理6.5.2より $\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\big\{\int g(x)\,dx\big\} = g(x)$ ． 関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\,G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x) + f(x)\,\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)\ .$$

関数 $f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)$ は連続なので，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b\{f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)\}\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b\ .$$

この等式の左辺は $\int_a^b\{f'(x)\,G(x) + f(x)\,g(x)\}\,dx = \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ なので，

$$\int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b\ ,$$

故に $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \big[f(x)\,G(x)\big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx$ ．　（証明終り）