

## § 7.3 部分積分法

関数  $f$  の導関数  $f'$  及び関数  $g$  は連続であるとし、 $\int g(x) dx = G(x) + C$  ( $C$  は積分定数) とし、定理 6.5.2 より

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx - C\} = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx\} = g(x).$$

関数の積の微分公式 (定理 3.3.1) より、

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x).$$

従って、定理 6.7 より、

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx &= \int \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx \\ &= \int f'(x)G(x) dx + \int f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

この等式の左辺は定理 6.5.3 より  $\int \left[ \frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} \right] dx = f(x)G(x) + D$  ( $D$  は積分定数) ですから、

$$f(x)G(x) + D = \int f(x)g(x) dx + \int f'(x)G(x) dx,$$

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx + D,$$

この等式の右辺の積分定数  $D$  を不定積分の式  $\int f'(x)G(x) dx$  に含めると、

$$\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx.$$

こうして次のことが分かります:  $\int g(x) dx = G(x) + C$  ( $C$  は積分定数) とすると  $\int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx$ . ここで、 $\int g(x) dx = G(x) + C$  における積分定数  $C$  は、以後の計算に現れないので省略してもかまいません。

**定理** (不定積分の部分積分法) 関数  $f$  の導関数  $f'$  及び関数  $g$  は連続であるとする。関数  $f, g, G$  について、

$$\int g(x) dx = G(x) \text{ とすると } \int f(x)g(x) dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x) dx;$$

ここで不定積分  $\int g(x) dx = G(x)$  の計算では積分定数を略してよい。

この公式を用いる積分計算法を部分積分法といいます。この公式は関数の積の微分公式から導くことを理解して下さい。

**例題** 不定積分  $\int x \cos x dx$  を計算する。更にその結果を用いて不定積分  $\int x^2 \sin x dx$  を計算する。

**【解説】** 積分定数を略すと  $\int \cos x dx = \sin x$ , また  $\frac{d}{dx}x = 1$  なので、部分積分法の公式に当てはめると、

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int 1 \sin x dx = x \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C_1, \end{aligned}$$

ここで  $C_1$  は積分定数である。更にこの結果を用いて  $\int x^2 \sin x dx$  を計算する。積分定数を略すと  $\int \sin x dx = -\cos x$ , また  $\frac{d}{dx}x^2 = 2x$  なので、部分積分法の公式に当てはめると、

$$\begin{aligned} \int x^2 \sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx \\ &= -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C_2 \\ &= 2x \sin x + (2 - x^2) \cos x + C_2, \end{aligned}$$

ここで  $C_2$  は積分定数である。 終

**問題 7.3.1** 不定積分  $\int x \sin x dx$  を計算しなさい。更にその結果を用いて不定積分  $\int x^2 \cos x dx$  を計算しなさい。

**問題 7.3.2** 不定積分  $\int x e^x dx$  を計算しなさい。更にその結果を用いて不定積分  $\int x^2 e^x dx$  を計算しなさい。

関数  $f$  は微分可能で更に導関数  $f'$  は連続であるとし、不定積分  $\int f(x) dx$  を計算するために、 $f(x) = f(x) \cdot 1$  と考えて部分積分法の公式を適用します: 積分定数を略すと  $\int 1 dx = x$  ですから、

$$\int f(x) dx = \int f(x) 1 dx = f(x)x - \int f'(x)x dx = x f(x) - \int x f'(x) dx.$$

この部分積分法を用いると対数関数  $\ln x$  の積分公式が導かれます:  $\int 1 dx = x$ ,  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$  なので、積分定数を  $C$  とおくと、

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= \int (\ln x) 1 dx = (\ln x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int 1 dx \\ &= x \ln x - x + C. \end{aligned}$$

(積分公式)

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C \quad (C \text{ は積分定数}).$$

**例題** 不定積分  $\int \ln(3y+2) dy$  を計算する。

$z = 3y+2$  とおく。  $\frac{dz}{dy} = 3$  より  $dy = \frac{1}{3} dz$ . よって、積分定数を  $C$  とおくと、

$$\begin{aligned} \int \ln(3y+2) dy &= \int (\ln z) \frac{1}{3} dz = \frac{z}{3} (\ln z - 1) + C \\ &= \frac{3y+2}{3} \{\ln(3y+2) - 1\} + C. \end{aligned}$$

終

**問題 7.3.3** 不定積分  $\int \ln(4u+7) du$  を計算しなさい。

**例題** 不定積分  $\int y \ln y dy$  を計算する。

$\int y \ln y dy = \int (\ln y)y dy$  と変形してから部分積分法の公式を適用する。積分定数を略すと  $\int y dy = \frac{1}{2} y^2$ , また  $\frac{d}{dy} \ln y = \frac{1}{y}$  なので、積分定数を  $C$  とおくと、

$$\begin{aligned} \int y \ln y dy &= \int (\ln y)y dy = (\ln y) \frac{1}{2} y^2 - \int \frac{1}{y} \frac{1}{2} y^2 dy \\ &= \frac{y^2}{2} (\ln y) - \frac{1}{2} \int y dy = \frac{y^2}{2} \ln y - \frac{1}{2} \frac{1}{2} y^2 + C \\ &= \frac{y^2}{2} \left( \ln y - \frac{1}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

終

**問題 7.3.4** 不定積分  $\int x^3 \ln x dx$  を計算しなさい。

**例題** 不定積分  $\int x \sin 3x dx$  を計算する。

**【解説】** 変数  $y$  を  $y = 3x$  とおく。  $\frac{dy}{dx} = 3$  なので  $dx = \frac{1}{3} dy$ . 積分定数を略すと、

$$\int \sin 3x dx = \int \sin y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} (-\cos y) = -\frac{1}{3} \cos 3x,$$

$$\int \cos 3x dx = \int \cos y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \sin y = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

また  $\frac{d}{dx}x = 1$  なので、部分積分法により、

$$\begin{aligned} \int x \sin 3x dx &= -\frac{1}{3} x \cos 3x - \left( -\frac{1}{3} \int 1 \cdot \cos 3x dx \right) \\ &= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \sin 3x + C \\ &= \frac{1}{9} \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

ここで  $C$  は積分定数である。 終

**問題 7.3.5** 不定積分  $\int x \cos 5x dx$  を計算しなさい。

**問題 7.3.6** 不定積分  $\int x e^{\frac{x}{3}} dx$  を計算しなさい。

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算します。

**例題** 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$  を計算する。

まず部分積分法によって不定積分  $\int x \cos x dx$  を計算する。積分定数を  $C$  とおくと、

$$\begin{aligned} \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C. \end{aligned}$$

従って、微分積分の基本定理より、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \cos \pi - (0 \sin 0 + \cos 0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1.$$

終

**問題 7.3.7** 定積分  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t \sin t dt$  を計算しなさい。

### 定積分の部分積分法

**定理** (定積分の部分積分法) 実数  $a, b$  が属するある区間において、関数  $f$  の導関数  $f'$  及び関数  $g$  は連続であるとする。関数  $f, g, G$  について、

$$\int g(x) dx = G(x) \text{ とすると } \int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx.$$

**証明** 関数  $G$  について  $G(x) = \int g(x) dx$  とする。定理 6.5.2 より

$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\{\int g(x) dx\} = g(x)$ . 関数の積の微分公式 (定理 3.3.1) より、

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x) \cdot G(x) + f(x) \frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x) + f(x)g(x).$$

関数  $f'(x)G(x) + f(x)g(x)$  は連続なので、微分積分の基本定理より、

$$\int_a^b \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx = [f(x)G(x)]_a^b.$$

この等式の左辺は  $\int_a^b \{f'(x)G(x) + f(x)g(x)\} dx = \int_a^b f'(x)G(x) dx + \int_a^b f(x)g(x) dx$  なので、

$$\int_a^b f'(x)G(x) dx + \int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b,$$

故に  $\int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx$ . (証明終り)