§7.3　部分積分法

関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとします． $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ （C は積分定数） とします． 定理6.5.2より

$$\frac{d}{dx}G(x) = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx - C\right\} = \frac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} = g(x)\ .$$

関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x) + f(x)\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x)+f(x)g(x)\ .$$

従って，定理6.7より，

$$\begin{aligned}\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}\right]dx &= \int\{f'(x)G(x)+f(x)g(x)\}\,dx \\ &= \int f'(x)G(x)\,dx + \int f(x)g(x)\,dx\ .\end{aligned}$$

この等式の左辺は定理6.5.3より $\displaystyle\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\}\right]dx = f(x)G(x)+D$ （D は積分定数） ですから，

$$\begin{aligned}f(x)G(x)+D &= \int f(x)g(x)\,dx + \int f'(x)G(x)\,dx\ ,\\ \int f(x)g(x)\,dx &= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx + D\ ,\end{aligned}$$

この等式の右辺の積分定数 D を不定積分の式 $\int f'(x)G(x)\,dx$ に含めると，

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx\ .$$

こうして次のことが分かります： $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ （C は積分定数） とすると $\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$ ． ここで， $\int g(x)\,dx = G(x)+C$ における積分定数 C は，以後の計算に現れないので省略してもかまいません．

定理（不定積分の部分積分法）　関数 f,g,G について，f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき，

$$\int g(x)\,dx = G(x) \quad \text{とすると} \quad \int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx\ ;$$

ここで不定積分 $\int g(x)\,dx = G(x)$ の計算では積分定数を略してよい．

この公式を用いる積分計算法を部分積分法といいます． 公式の成り立ちを覚えて下さい： 関数 f の導関数 f' 及び関数 g が連続であるとき，$g(x)$ の不定積分 $\int g(x)\,dx = G(x)$ に対して，

そのまま　　微分する

$$\int \boxed{f(x)}\,\boxed{g(x)}\,dx = \boxed{f(x)}\,\boxed{G(x)} - \int \boxed{f'(x)}\,\boxed{G(x)}\,dx\ .$$

積分する　　そのまま

$\boxed{\text{例題}}$ 不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 積分定数を略すと $\int \cos x\,dx = \sin x$ ， また $\dfrac{d}{dx}x = 1$ なので，部分積分法の公式に当てはめると，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int 1\sin x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx \\ &= x\sin x + \cos x + C_1\ ,\end{aligned}$$

ここで C_1 は積分定数である． 更にこの結果を用いて $\int x^2\sin x\,dx$ を計算する． 積分定数を略すと $\int \sin x\,dx = -\cos x$ ， また $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ なので，部分積分法の公式に当てはめると，

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx \\ &= -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + C_2 \\ &= 2x\sin x + (2-x^2)\cos x + C_2\ ,\end{aligned}$$

ここで C_2 は積分定数である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3.1}}$ 不定積分 $\int x\sin x\,dx$ を計算しなさい． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2\cos x\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{問題 7.3.2}}$ 不定積分 $\int xe^x dx$ を計算しなさい． 更にその結果を用いて不定積分 $\int x^2e^x dx$ を計算しなさい．

関数 f は微分可能で更に導関数 f' は連続であるとします． 不定積分 $\int f(x)\,dx$ を計算するために， $f(x) = f(x)\cdot 1$ と考えて部分積分法の公式を適用します：積分定数を略すと $\int 1\,dx = x$ ですから，

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)1\,dx = f(x)x - \int f'(x)x\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx\ .$$

この部分積分法を用いると対数関数 $\ln x$ の積分公式が導かれます： $\int 1\,dx = x$ ， $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= \int(\ln x)1\,dx = (\ln x)x - \int\frac{1}{x}x\,dx = x\ln x - \int 1\,dx \\ &= x\ln x - x + C\ .\end{aligned}$$

（積分公式）

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C \quad （C \text{ は積分定数}）．$$

$\boxed{\text{例題}}$ 不定積分 $\int \ln(3y+2)\,dy$ を計算する．

$z = 3y+2$ とおく． $\dfrac{dz}{dy} = 3$ より $dy = \dfrac{1}{3}dz$ ． よって，積分定数を C_0, C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \ln(3y+2)\,dy &= \int(\ln z)\frac{1}{3}dz = \frac{1}{3}(z\ln z - z) + C_0 \\ &= \frac{1}{3}\{(3y+2)\ln(3y+2) - 3y - 2\}C_0 \\ &= \left(y+\frac{2}{3}\right)\ln(3y+2) - y + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3.3}}$ 不定積分 $\int \ln(4u+7)\,du$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 不定積分 $\int y\ln y\,dy$ を計算する．

$\int y\ln y\,dy = \int(\ln y)y\,dy$ と変形してから部分積分法の公式を適用する． 積分定数を略すと $\int y\,dy = \dfrac{1}{2}y^2$ ， また $\dfrac{d}{dy}\ln y = \dfrac{1}{y}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int y\ln y\,dy &= \int(\ln y)y\,dy = (\ln y)\frac{1}{2}y^2 - \int\frac{1}{y}\frac{1}{2}y^2dy \\ &= \frac{y^2}{2}(\ln y) - \frac{1}{2}\int y\,dy = \frac{y^2}{2}\ln y - \frac{1}{2}\frac{1}{2}y^2 + C \\ &= \frac{y^2}{2}\left(\ln y - \frac{1}{2}\right) + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3.4}}$ 不定積分 $\int x^3\ln x\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 不定積分 $\int x\sin 3x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 変数 y を $y = 3x$ とおく． $\dfrac{dy}{dx} = 3$ なので $dx = \dfrac{1}{3}dy$ ． 積分定数を略すと，

$$\begin{aligned}\int \sin 3x\,dx &= \int \sin y\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}(-\cos y) = -\frac{1}{3}\cos 3x\ ,\\ \int \cos 3x\,dx &= \int \cos y\frac{1}{3}dy = \frac{1}{3}\sin y = \frac{1}{3}\sin 3x\ .\end{aligned}$$

また $\dfrac{d}{dx}x = 1$ なので，部分積分法により，

$$\begin{aligned}\int x\sin 3x\,dx &= -\frac{1}{3}x\cos 3x - \left(-\frac{1}{3}\int 1\cdot\cos 3x\,dx\right) \\ &= -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\int\cos 3x\,dx = -\frac{x}{3}\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C \\ &= \frac{1}{9}\sin 3x - \frac{x}{3}\cos 3x + C\ .\end{aligned}$$

ここで C は積分定数である． $\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3.5}}$ 不定積分 $\int x\cos 5x\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{問題 7.3.6}}$ 不定積分 $\int xe^{\frac{x}{3}}dx$ を計算しなさい．

部分積分法と微分積分の基本定理とを用いて定積分を計算します．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ を計算する．

まず部分積分法によって不定積分 $\int x\cos x\,dx$ を計算する． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int x\cos x\,dx &= x\sin x - \int\sin x\,dx = x\sin x - (-\cos x) + C \\ &= x\sin x + \cos x + C\ .\end{aligned}$$

従って，微分積分の基本定理より，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx &= \Big[x\sin x + \cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi - (0\sin 0 + \cos 0) \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.3.7}}$ 定積分 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} t\sin t\,dt$ を計算しなさい．

―――― 定積分の部分積分法

定理（定積分の部分積分法）　実数 a, b が属すある区間において，関数 f の導関数 f' 及び関数 g は連続であるとする． 関数 f,g,G について，

$$\int g(x)\,dx = G(x) \quad \text{とすると} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx\ .$$

証明　関数 G について $G(x) = \int g(x)\,dx$ とする． 定理6.5.2より $\dfrac{d}{dx}G(x) = \dfrac{d}{dx}\left\{\int g(x)\,dx\right\} = g(x)$ ． 関数の積の微分公式（定理3.3.1）より，

$$\frac{d}{dx}\{f(x)G(x)\} = \frac{d}{dx}f(x)\cdot G(x) + f(x)\frac{d}{dx}G(x) = f'(x)G(x)+f(x)g(x)\ .$$

関数 $f'(x)G(x)+f(x)g(x)$ は連続なので，微分積分の基本定理より，

$$\int_a^b\{f'(x)G(x)+f(x)g(x)\}\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b\ .$$

この等式の左辺は $\int_a^b\{f'(x)G(x)+f(x)g(x)\}\,dx = \int_a^b f'(x)G(x)\,dx + \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ なので，

$$\int_a^b f'(x)G(x)\,dx + \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b\ ,$$

故に $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \Big[f(x)G(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ ． （証明終り）