§7.4　有理関数の積分法

分母分子が整式である分数式で表される関数を有理関数といいました.

分子の整式の次数が分母の整式の次数より小さい分数式を真分数式といいます. 分数式の分子の整式の次数が分母の整式の次数以上であるとき,

積分するためにはまずその分数式を整式と真分数式との和に分解する

ことが基本方針です.

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx$ を計算する.

〔解説〕 整式 $3x^2-4x+2$ を $2x-1$ で割るとき整商は $\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{4}$ で剰余は $\dfrac{3}{4}$ なので,

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \frac{3}{2}x & -\ \frac{5}{4} \\ \cline{2-4}
2x-1 \ \big) & 3x^2 & -\ 4x & +\ 2 \\
 & 3x^2 & -\ \frac{3}{2}x & \\ \cline{2-3}
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ 2 \\
 & & -\ \frac{5}{2}x & +\ \frac{5}{4} \\ \cline{3-4}
 & & & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

$$3x^2-4x+2 = \left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}\ .$$

よって,

$$\frac{3x^2-4x+2}{2x-1} = \frac{\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)(2x-1)+\frac{3}{4}}{2x-1} = \frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\ .$$

従って,

$$\int \frac{3x^2-4x+2}{2x-1}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{2x-1}\right)dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx\ .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおく. $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$. 積分定数を C_0 とおくと,

$$\int\frac{1}{2x-1}\,dx = \int\frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy = \frac{1}{2}\ln|y|+C_0 = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C_0\ .$$

故に, 積分定数を C とおくと,

$$\int \frac{3x^2-4x+1}{2x-1}\,dx = \int\left(\frac{3}{2}x-\frac{5}{4}\right)dx+\frac{3}{4}\int\frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{3}{4}x^2-\frac{5}{4}x+\frac{3}{8}\ln|2x-1|+C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.4}}$　以下の不定積分を計算しなさい.

(1) $\displaystyle\int\frac{3x}{2x+5}\,dx$.　　　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^2+5x}{2x-1}\,dx$.