§7.5　有理関数の積分法

定数 a,b,c,h,k （ $a\neq 0$ ）に対して，分母が２次式である真分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分[2] を考えます． この不定積分の計算法は，x の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なります． この節では $b^2-4ac>0$ のときと $b^2-4ac=0$ のときとを扱います．

i) $b^2-4ac>0$ のとき

分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac>0$ のときを考えます． このとき，分母の２次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で２つの１次式の積に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x) \quad （ A(x) と B(x) とは x の１次式で互いに素）．$$

そして更に，ある定数 p と q とをとると，x に関する次の恒等式[3] が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)} \ .$$

このような分数式の変形を部分分数分解といいます． $A(x)\neq 0$ ，$B(x)\neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} &\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)} \\ \iff\ &\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x)+\frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x) \\ \iff\ &hx+k = p\,B(x)+q\,A(x) \ . \end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned} &\text{等式 } \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)} \text{ が恒等式である} \\ \iff\ &\text{等式 } hx+k = p\,B(x)+q\,A(x) \text{ が恒等式である} \ . \end{aligned}$$

そこで，等式 $hx+k=p\,B(x)+q\,A(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定めます． そのためには恒等式に関する次の性質を用います：x の高々１次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（ a,b,p,q は x と無関係な定数）について，

$$\text{等式 } ax+b=px+q \text{ が } x \text{ に関する恒等式である} \iff a=p \text{ かつ } b=q \ .$$

$\boxed{\text{例題}}$　次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 等式 $\dfrac{9x-7}{(x+2)(x-3)}=\dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると，

$$\begin{gathered} \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3)+\frac{b}{x-3}(x+2)(x-3) \ , \\ 9x-7 = a(x-3)+b(x+2) \ ; \end{gathered}$$

右辺を整理すると

$$9x-7 = (a+b)x-3a+2b \ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は， $a+b=9$ ， $-3a+2b=-7$ ． この方程式を解くと $a=5$ ， $b=4$ ． よって次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3} \ .$$

従って，

$$\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx = 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx \ .$$

変数 y を $y=x+2$ とおき，変数 z を $z=x-3$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ， $\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$ ． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned} 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int\frac{1}{y}\,dy+4\int\frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y|+4\ln|z|+C \\ &= 5\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C \ , \end{aligned}$$

故に

$$\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = 5\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.1}}$　次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定めなさい：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-4} \ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4} \ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\begin{gathered} \frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4) \ , \\ 7x+10 = a(x+4)+b(2x-1) \ , \\ 7x+10 = (a+2b)x+4a-b \ . \end{gathered}$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ． この方程式を解くと $a=3$ ， $b=2$ ． 従って，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4} \ .$$

よって，

$$\int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\right)dx = \int\frac{3}{2x-1}\,dx+\int\frac{2}{x+4}\,dx \ .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおき，変数 z を $z=x+4$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ， $\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$ ． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned} \int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx &= \int\frac{3}{2x-1}\,dx+\int\frac{2}{x+4}\,dx = \int\frac{3}{y}\,\frac{1}{2}\,dy+\int\frac{2}{z}\,dz \\ &= \frac{3}{2}\ln|y|+2\ln|z|+C \\ &= \frac{3}{2}\ln|2x-1|+2\ln|x+4|+C \ . \end{aligned} \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.2}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算しなさい．

ii) $b^2-4ac=0$ のとき

分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ （ a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で， $b^2-4ac=0$ のときを考えます． このとき，分母の２次式 ax^2+bx+c は１次式の２乗の形に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)^2 \quad （ A(x) は x の１次式）．$$

高々１次の式 $hx+k$ を１次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数です：

$$hx+k = q\,A(x)+r \ .$$

従って，x に関する次の恒等式が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{q\,A(x)+r}{A(x)^2} = \frac{q\,A(x)}{A(x)^2}+\frac{r}{A(x)^2} = \frac{q}{A(x)}+\frac{r}{A(x)^2} \ .$$

このような分数式の変形も部分分数分解といいます．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{4x+7}{x^2+6x+9}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 x の２次式 x^2+6x+9 を因数分解すると $x^2+6x+9=(x+3)^2$ ． 整式 $4x+7$ を $x+3$ で割るとき整商は 4 で剰余は -5 なので，

$$4x+7 = 4(x+3)-5 \ .$$

よって，

$$\frac{4x+7}{x^2+6x+9} = \frac{4(x+3)-5}{(x+3)^2} = \frac{4(x+3)}{(x+3)^2}-\frac{5}{(x+3)^2} = \frac{4}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2} \ .$$

従って，

$$\int\frac{4x+7}{x^2+6x+9}\,dx = \int\left\{\frac{4}{x+3}-\frac{5}{(x+3)^2}\right\}dx = \int\frac{4}{x+3}\,dx-\int\frac{5}{(x+3)^2}\,dx \ .$$

変数 y を $y=x+3$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ． 積分定数を C_1,C_2 とおくと，

$$\begin{gathered} \int\frac{4}{x+3}\,dx = \int\frac{4}{y}\,dy = 4\ln|y| = 4\ln|x+3|+C_1 \ , \\ \int\frac{5}{(x+3)^2} = 5\int y^{-2}dy = -5y^{-1} = -\frac{5}{x+3}+C_2 \ . \end{gathered}$$

故に，積分定数を C とおくと，

$$\int\frac{4x+7}{x^2+6x+9}\,dx = \int\frac{4}{x+3}\,dx-\int\frac{5}{(x+3)^2}\,dx = 4\ln|x+3|+\frac{5}{x+3}+C \ . \qquad \boxed{\text{終}}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.3}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x-1}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算しなさい．

---

2) 正確には“分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ で表される関数の不定積分”というべきですが，略して“分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分”といいます．

3) 文字 x の値が何であっても（両辺が値を持つ限り）成り立つ等式を x に関する恒等式といいました．