

§ 7.5 有理関数の積分法

定数 a, b, c, h, k ($a \neq 0$) に対して、分母が2次式である真分数式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分²⁾ を考えます。この不定積分の計算法は、 x の2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なります。この節では $b^2-4ac > 0$ のときと $b^2-4ac=0$ のときとを扱います。

i) $b^2-4ac > 0$ のとき

分数式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ (a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$) の不定積分で、 $b^2-4ac > 0$ のときを考えます。このとき、分母の2次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で2つの1次式の積に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)B(x) \quad (A(x) \text{ と } B(x) \text{ とは } x \text{ の1次式で互いに素}).$$

そして更に、ある定数 p と q とをとると、 x に関する次の恒等式³⁾ が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)}.$$

このような分数式の変形を部分分数分解といいます。 $A(x) \neq 0$, $B(x) \neq 0$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{hx+k}{A(x)B(x)} &= \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \\ \iff \frac{hx+k}{A(x)B(x)} A(x)B(x) &= \frac{p}{A(x)} A(x)B(x) + \frac{q}{B(x)} A(x)B(x) \\ \iff hx+k &= pB(x) + qA(x). \end{aligned}$$

従って、

$$\text{等式 } \frac{hx+k}{A(x)B(x)} = \frac{p}{A(x)} + \frac{q}{B(x)} \text{ が恒等式である}$$

$$\iff \text{等式 } hx+k = pB(x) + qA(x) \text{ が恒等式である}.$$

そこで、等式 $hx+k = pB(x) + qA(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定めます。そのためには恒等式に関する次の性質を用います： x の高々1次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と (a, b, p, q は x と無関係な定数) について、

$$\text{等式 } ax+b = px+q \text{ が } x \text{ に関する恒等式である} \iff a=p \text{ かつ } b=q.$$

例題 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}.$$

更にその結果を用いて不定積分 $\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx$ を計算する。

【解説】 等式 $\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると、

$$\begin{aligned} \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) &= \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3) + \frac{b}{x-3}(x+2)(x-3), \\ 9x-7 &= a(x-3) + b(x+2); \end{aligned}$$

右辺を整理すると

$$9x-7 = (a+b)x - 3a + 2b.$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は、 $a+b=9$, $-3a+2b=-7$ 。この方程式を解くと $a=5$, $b=4$ 。よって次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3}.$$

従って、

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx = \int \left(\frac{5}{x+2} + \frac{4}{x-3} \right) dx = 5 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x-3} dx.$$

変数 y を $y=x+2$ とおき、変数 z を $z=x-3$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx=dy$, $\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx=dz$ 。積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} 5 \int \frac{1}{x+2} dx + 4 \int \frac{1}{x-3} dx &= 5 \int \frac{1}{y} dy + 4 \int \frac{1}{z} dz = 5 \ln|y| + 4 \ln|z| + C \\ &= 5 \ln|x+2| + 4 \ln|x-3| + C, \end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} dx = 5 \ln|x+2| + 4 \ln|x-3| + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.1 次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a, b の値を定めなさい：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-4}.$$

更にその結果を用いて不定積分 $\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} dx$ を計算しなさい。

例題 不定積分 $\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx$ を計算する。

【解説】 $2x^2+7x-4 = (2x-1)(x+4)$ なので、ある定数 a, b とをとると、 x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1} + \frac{b}{x+4}.$$

両辺に $2x^2+7x-4 = (2x-1)(x+4)$ を掛けると、

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4) + \frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4),$$

$$7x+10 = a(x+4) + b(2x-1),$$

$$7x+10 = (a+2b)x + 4a - b.$$

この等式が x に関する恒等式である条件は、 $a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ 。この方程式を解くと $a=3$, $b=2$ 。従って、

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4}.$$

よって、

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx = \int \left(\frac{3}{2x-1} + \frac{2}{x+4} \right) dx = \int \frac{3}{2x-1} dx + \int \frac{2}{x+4} dx.$$

変数 y を $y=2x-1$ とおき、変数 z を $z=x+4$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 2$ なので $dx = \frac{1}{2} dy$, $\frac{dz}{dx} = 1$ なので $dx=dz$ 。積分定数を C とおくと、

$$\int \frac{7x+10}{2x^2+7x-4} dx = \int \frac{3}{2x-1} dx + \int \frac{2}{x+4} dx = \int \frac{3}{y} \frac{1}{2} dy + \int \frac{2}{z} dz$$

$$= \frac{3}{2} \ln|y| + 2 \ln|z| + C$$

$$= \frac{3}{2} \ln|2x-1| + 2 \ln|x+4| + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.2 不定積分 $\int \frac{x-12}{2x^2+x-6} dx$ を計算しなさい。

ii) $b^2-4ac=0$ のとき

分数式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ (a, b, c, h, k は定数で $a \neq 0$) の不定積分で、 $b^2-4ac=0$ のときを考えます。このとき、分母の2次式 ax^2+bx+c は1次式の2乗の形に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)^2 \quad (A(x) \text{ は } x \text{ の1次式}).$$

高々1次の式 $hx+k$ を1次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数です：

$$hx+k = qA(x) + r.$$

従って、 x に関する次の恒等式が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{qA(x)+r}{A(x)^2} = \frac{qA(x)}{A(x)^2} + \frac{r}{A(x)^2} = \frac{q}{A(x)} + \frac{r}{A(x)^2}.$$

このような分数式の変形も部分分数分解といいます。

例題 不定積分 $\int \frac{4x+7}{x^2+6x+9} dx$ を計算する。

【解説】 x の2次式 x^2+6x+9 を因数分解すると $x^2+6x+9 = (x+3)^2$ 。整式 $4x+7$ を $x+3$ で割るとき整商は4で剰余は-5なので、

$$4x+7 = 4(x+3) - 5.$$

よって、

$$\frac{4x+7}{x^2+6x+9} = \frac{4(x+3)-5}{(x+3)^2} = \frac{4(x+3)}{(x+3)^2} - \frac{5}{(x+3)^2} = \frac{4}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2}.$$

従って、

$$\int \frac{4x+7}{x^2+6x+9} dx = \int \left\{ \frac{4}{x+3} - \frac{5}{(x+3)^2} \right\} dx = \int \frac{4}{x+3} dx - \int \frac{5}{(x+3)^2} dx.$$

変数 y を $y=x+3$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 1$ なので $dx=dy$ 。積分定数を C_1, C_2 とおくと、

$$\int \frac{4}{x+3} dx = \int \frac{4}{y} dy = 4 \ln|y| = 4 \ln|x+3| + C_1,$$

$$\int \frac{5}{(x+3)^2} dx = 5 \int y^{-2} dy = -5y^{-1} = -\frac{5}{x+3} + C_2.$$

故に、積分定数を C とおくと、

$$\int \frac{4x+7}{x^2+6x+9} dx = \int \frac{4}{x+3} dx - \int \frac{5}{(x+3)^2} dx = 4 \ln|x+3| + \frac{5}{x+3} + C. \quad \text{終}$$

問題 7.5.3 不定積分 $\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+1} dx$ を計算しなさい。

²⁾ 正確には“分数式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ で表される関数の不定積分”というべきですが、略して“分数式 $\frac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分”といいます。

³⁾ 文字 x の値が何であっても(両辺が値を持つ限り)成り立つ等式を x に関する恒等式といいました。