§7.5　有理関数の積分法

変数 x 及び定数 a,b,c,h,k（ $a\neq 0$ ）に対して，分母が 2 次式である真分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分 [2] を考えます．　この不定積分の計算法は，x の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 b^2-4ac の値の符号によって異なります．

i)　$b^2-4ac>0$ のとき

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$（ a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac>0$ のときを考えます．　このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は係数が実数の範囲で2つの 1 次式の積に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = A(x)\,B(x)\quad（A(x)\ と\ B(x)\ とは\ x\ の 1 次式で互いに素）.$$

そして更に，ある定数 p と q とをとると，x に関する次の恒等式 [3] が成り立ちます：

$$\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)}\ .$$

このような分数式の変形を部分分数分解といいます．　$A(x)\neq 0$ ，$B(x)\neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)}\\
\iff\ &\frac{hx+k}{A(x)\,B(x)}A(x)\,B(x) = \frac{p}{A(x)}A(x)\,B(x)+\frac{q}{B(x)}A(x)\,B(x)\\
\iff\ &hx+k = p\,B(x)+q\,A(x)\ .
\end{aligned}$$

従って，

$$\begin{aligned}
&等式\ \frac{hx+k}{A(x)\,B(x)} = \frac{p}{A(x)}+\frac{q}{B(x)}\ が恒等式である\\
\iff\ &等式\ hx+k = p\,B(x)+q\,A(x)\ が恒等式である\quad .
\end{aligned}$$

そこで，等式 $hx+k=p\,B(x)+q\,A(x)$ が恒等式になるように p の値と q の値とを定めます．　そのためには恒等式に関する次の性質を用います：x の高々1 次の整式 $ax+b$ と $px+q$ と（ a,b,p,q は x と無関係な定数）について，

等式 $ax+b=px+q$ が x に関する恒等式である $\iff$ $a=p$ かつ $b=q$ ．

$\boxed{\text{例題}}$　次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定める：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-3}\ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 等式 $\dfrac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \dfrac{a}{x+2}+\dfrac{b}{x-3}$ の両辺に $(x+2)(x-3)$ を掛けると，

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}(x+2)(x-3) = \frac{a}{x+2}(x+2)(x-3)+\frac{b}{x-3}(x+2)(x-3)\ ,$$
$$9x-7 = a(x-3)+b(x+2)\ ;$$

右辺を整理すると

$$9x-7 = (a+b)x-3a+2b\ .$$

この等式が x に関する恒等式になる条件は，$a+b=9$ ，$-3a+2b=-7$ ．　この方程式を解くと $a=5$ ，$b=4$ ．　よって次の x に関する恒等式が成り立つ：

$$\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)} = \frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\ .$$

従って，

$$\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = \int\left(\frac{5}{x+2}+\frac{4}{x-3}\right)dx = 5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx\ .$$

変数 y を $y=x+2$ とおき，変数 z を $z=x-3$ とおく．　$\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ，$\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$ ．　積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}
5\int\frac{1}{x+2}\,dx+4\int\frac{1}{x-3}\,dx &= 5\int\frac{1}{y}\,dy+4\int\frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y|+4\ln|z|+C\\
&= 5\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C\ ,
\end{aligned}$$

故に

$$\int\frac{9x-7}{(x+2)(x-3)}\,dx = 5\ln|x+2|+4\ln|x-3|+C\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.5.1}}$　次の等式が x に関する恒等式になるように定数 a,b の値を定めなさい：

$$\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x-4}\ .$$

更にその結果を用いて不定積分 $\displaystyle\int\frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ なので，ある定数 a,b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{7x+10}{(2x-1)(x+4)} = \frac{a}{2x-1}+\frac{b}{x+4}\ .$$

両辺に $2x^2+7x-4=(2x-1)(x+4)$ を掛けると，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}(2x^2+7x-4) = \frac{a}{2x-1}(2x-1)(x+4)+\frac{b}{x+4}(2x-1)(x+4)\ ,$$
$$7x+10 = a(x+4)+b(2x-1)\ ,$$
$$7x+10 = (a+2b)x+4a-b\ .$$

この等式が x に関する恒等式である条件は，$a+2b=7$ かつ $4a-b=10$ ．　この方程式を解くと $a=3$ ，$b=2$ ．　従って，

$$\frac{7x+10}{2x^2+7x-4} = \frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\ .$$

よって，

$$\int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx = \int\left(\frac{3}{2x-1}+\frac{2}{x+4}\right)dx = \int\frac{3}{2x-1}\,dx+\int\frac{2}{x+4}\,dx\ .$$

変数 y を $y=2x-1$ とおき，変数 z を $z=x+4$ とおく．　$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ，$\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$ ．　積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}
\int\frac{7x+10}{2x^2+7x-4}\,dx &= \int\frac{3}{2x-1}\,dx+\int\frac{2}{x+4}\,dx = \int\frac{3}{y}\,\frac{1}{2}\,dy+\int\frac{2}{z}\,dz\\
&= \frac{3}{2}\ln|y|+2\ln|z|+C\\
&= \frac{3}{2}\ln|2x-1|+2\ln|x+4|+C\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.5.2}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx$ を計算しなさい．

ii)　$b^2-4ac=0$ のとき

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$（ a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac=0$ のときを考えます．　このとき，分母の 2 次式 ax^2+bx+c は 1 次式の 2 乗の定数倍の形に因数分解できます：

$$ax^2+bx+c = l\,A(x)^2\quad（l\ は定数で\ A(x)\ は\ x\ の 1 次式）.$$

高々1 次の式 $hx+k$ を 1 次式 $A(x)$ で割るとき整商 q と剰余 r とは定数です：

$$hx+k = q\,A(x)+r\ .$$

これより，

$$\frac{hx+k}{ax^2+bx+c} = \frac{q\,A(x)+r}{l\,A(x)^2} = \frac{q\,A(x)}{l\,A(x)^2}+\frac{r}{l\,A(x)^2} = \frac{q}{l\,A(x)}+\frac{r}{l\,A(x)^2}\ .$$

このような分数式の変形も部分分数分解といいます．　このような関数を積分するには変数 y を $y=A(x)$ とおいて置換積分します．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx$ を計算する．

x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ．　整式 $6x-5$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -8 なので，$6x-1=3(2x+1)-8$ ．　変数 y を $y=2x+1$ とおく．

$$\frac{6x-5}{4x^2+4x+1} = \frac{3(2x+1)-8}{(2x+1)^2} = \frac{3y-8}{y^2} = \frac{3y}{y^2}-\frac{8}{y^2} = \frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\ .$$

$\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}\,dy$ ．　積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}
\int\frac{6x-5}{4x^2+4x+1}\,dx &= \int\left(\frac{3}{y}-\frac{8}{y^2}\right)\frac{1}{2}\,dy = 3\int\frac{1}{y}\,dy-4\int y^{-2}dy\\
&= \frac{3}{2}\ln|y|-4(-y^{-1})+C\\
&= \frac{3}{2}\ln|2x+1|+\frac{4}{2x+1}+C\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.5.3}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{6x+7}{9x^2-6x+1}\,dx$ を計算しなさい．

iii)　$b^2-4ac<0$ のとき

変数 x の分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$（ a,b,c,h,k は定数で $a\neq 0$ ）の不定積分で，$b^2-4ac<0$ のときを考えます．　このときは分母の 2 次式 ax^2+bx+c を平方完成します：

$$ax^2+bx+c = a(x+p)^2+q\quad（p,q\ は定数）.$$

そして変数 y を $y=x+p$ とおいて置換積分をします．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 被積分関数の分母 $x^2-2x+10$ を平方完成する：

$$x^2-2x+10 = x^2+2x+1-1+10 = (x+1)^2+9\ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおく．　$x=y-1$ なので，

$$\frac{3x+5}{x^2-2x+10} = \frac{3x+5}{(x+1)^2+9} = \frac{3(y-1)+5}{y^2+9} = \frac{3y+2}{y^2+9} = \frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\ .$$

$y=x+1$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．　従って

$$\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx = \int\left(\frac{3y}{y^2+9}+\frac{2}{y^2+9}\right)dy = \int\frac{3y}{y^2+9}\,dy+\int\frac{2}{y^2+9}\,dy\ .$$

$z=y^2+9$ とおく．　$\dfrac{dz}{dy}=2y$ なので $y\,dy=\dfrac{1}{2}\,dz$ ．　積分定数を C_1 とおく．

$$\int\frac{3y}{y^2+9}\,dy = \int\frac{3}{z}\,\frac{1}{2}\,dz = \frac{3}{2}\ln|z|+C_1 = \frac{3}{2}\ln|y^2+9|+C_1 = \frac{3}{2}\ln(y^2+9)+C_1\ .$$

また，積分定数を C_2 とおく．

$$\int\frac{2}{y^2+9}\,dy = 2\cdot\frac{1}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3}+C_2 = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3}+C_2\ .$$

故に，積分定数を C とおくと

$$\begin{aligned}
\int\frac{3x+5}{x^2+2x+10}\,dx &= \int\frac{3y}{y^2+9}\,dy+\int\frac{2}{y^2+9}\,dy = \frac{3}{2}\ln(y^2+9)+\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{y}{3}+C\\
&= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+10)+\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x+1}{3}+C\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.4}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx$ を計算する．

〔解説〕 被積分関数の分母 $2x^2-8x+9$ を平方完成する：

$$2x^2-8x+9 = 2(x^2-4x+4)-8+9 = 2(x-2)^2+1\ .$$

変数 y を $y=x-2$ とおく．　$x=y+2$ なので，

$$\frac{3x-11}{2x^2-8x+9} = \frac{3x-11}{2(x-2)^2+1} = \frac{3(y+2)-11}{2y^2+1} = \frac{3y-5}{2y^2+1} = \frac{3y}{2y^2+1}-\frac{5}{2y^2+1}\ .$$

$y=x-2$ より $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ．　従って

$$\int\frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx = \int\left(\frac{3y}{2y^2+1}-\frac{5}{2y^2+1}\right)dy = \int\frac{3y}{2y^2+1}\,dy-\int\frac{5}{2y^2+1}\,dy\ .$$

$z=2y^2+1$ とおく．　$\dfrac{dz}{dy}=4y$ なので $y\,dy=\dfrac{1}{4}\,dz$ ．　積分定数を C_1 とおく．

$$\begin{aligned}
\int\frac{3y}{2y^2+1}\,dy &= \int\frac{3}{z}\,\frac{1}{4}\,dz = \frac{3}{4}\ln|z|+C_1 = \frac{3}{4}\ln|2y^2+1|+C_1\\
&= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1)+C_1\ .
\end{aligned}$$

また，積分定数を C_2 とおく．

$$\begin{aligned}
\int\frac{5}{2y^2+1}\,dy &= \frac{5}{2}\int\frac{1}{y^2+\frac{1}{2}}\,dy = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{\frac{1}{2}}}+C_2\\
&= \frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr)+C_2\ .
\end{aligned}$$

故に，積分定数を C とおくと

$$\begin{aligned}
\int\frac{3x-11}{2x^2-8x+9}\,dx &= \int\frac{3y}{2y^2+1}\,dy-\int\frac{5}{2y^2+1}\,dy\\
&= \frac{3}{4}\ln(2y^2+1)-\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}\,y\bigr)+C\\
&= \frac{3}{4}\ln(2x^2-8x+9)-\frac{5\sqrt{2}}{2}\tan^{-1}\bigl\{\sqrt{2}\,(x-2)\bigr\}+C\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.5}}$　不定積分 $\displaystyle\int\frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx$ を計算しなさい．

---

[2] 正確には“分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ で表される関数の不定積分”というべきですが，略して“分数式 $\dfrac{hx+k}{ax^2+bx+c}$ の不定積分”といいます．

[3] 文字 x の値が何であっても（両辺が値を持つ限り）成り立つ等式を x に関する恒等式といいました．