§7.6　三角関数が現われる式の積分法

i) $f(\sin x)\cos x$, $f(\cos x)\sin x$ の形の式の積分

関数 f に対して，不定積分 $\int f(\sin x)\cos x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用います：変数 x, y について $y=\sin x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ より $\cos x\,dx=dy$ なので，

$$\int f(\sin x)\cos x\,dx = \int f(y)\,dy\ .$$

同様に，不定積分 $\int f(\cos x)\sin x\,dx$ の計算には次のような置換積分を用います：変数 x, y について $y=\cos x$ とおくと，$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ より $\sin x\,dx=-dy$ なので，

$$\int f(\cos x)\sin x\,dx = \int f(y)(-dy) = -\int f(y)\,dy\ .$$

例題　不定積分 $\int \sin x(\cos^3 x+2)\,dx$ を計算する．

変数 y を $y=\cos x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=(-dy)$ ．よって

$$\sin x(\cos^3 x+2)\,dx = (\cos^3 x+2)\sin x\,dx = (y^3+2)(-dy) = -(y^3+2)\,dy\ .$$

積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \sin x(\cos^3 x+2)\,dx &= -\int (y^3+2)\,dy = -\left(\frac{1}{4}y^4+2y\right)+C\\ &= -\frac{1}{4}\sin^4 x-2\sin x+C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.6.1　不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx$ を計算しなさい．

被積分関数を $f(\sin x)\cos x$ または $f(\cos x)\sin x$ の形の式に変形するために次の事実を用いることがあります：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より，

$$\cos^2 x = 1-\sin^2 x\ ,\qquad \sin^2 x = 1-\cos^2 x\ .$$

例題　不定積分 $\int \cos^3 x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 $\cos^2 x=1-\sin^2 x$ なので，

$$\cos^3 x = \cos^2 x\cos x = (1-\sin^2 x)\cos x\ .$$

変数 y を $y=\sin x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ より $\cos x\,dx=dy$ なので，

$$\cos^3 x\,dx = (1-\sin^2 x)\cos x\,dx = (1-y^2)\,dy\ .$$

積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\,dx &= \int (1-y^2)\,dy = y-\frac{1}{3}y^3+C = \sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3+C\\ &= \sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.6.2　不定積分 $\int \sin^3 x\,dx$ を計算しなさい．

正接関数 $\tan x$ が現われる式は，公式 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ によって変形します．

例題　不定積分 $\int \tan x(1-\cos x)\,dx$ を計算する．

$$\tan x(1-\cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1-\cos x) = \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\ .$$

変数 y を $y=\cos x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \tan x(1-\cos x)\,dx &= \int \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)dx = \int\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)\sin x\,dx\\ &= \int\left(\frac{1}{y}-1\right)(-dy) = \int\left(1-\frac{1}{y}\right)dy = y-\ln|y|+C\\ &= \cos x-\ln|\cos x|+C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.6.3　不定積分 $\displaystyle\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx$ を計算しなさい．

定数 a, b に対して関数 $\sin x$ の 1 次式 $a\sin x+b$ 或いは関数 $\cos x$ の 1 次式 $a\cos x+b$ を置換することもあります．

例題　不定積分 $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x+5}\,dx$ を計算する．

変数 y を $y=3\cos x+5$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=-3\sin x$ なので，$\sin x\,dx=-\dfrac{1}{3}dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{3\cos x+5}\,dx &= \int \frac{1}{y}\left(-\frac{1}{3}dy\right) = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{y}\,dy = -\frac{1}{3}\ln|y|+C\\ &= -\frac{1}{3}\ln|3\cos x+5|+C\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について，$\cos x\geq -1$ なので，$3\cos x\geq -3$ ，$3\cos x+5\geq 2$ ，よって $|3\cos x+5|=3\cos x+5$ ．故に $\displaystyle\int \frac{\sin x}{3\cos x+5}\,dx = -\frac{1}{3}\ln(3\cos x+5)+C$ ．

終

問題 7.6.4　不定積分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{5\sin x-7}\,dx$ を計算しなさい．

ii) 三角関数の積の積分

正弦関数や余弦関数の積を積分するときは，以下の公式を用いて三角関数の積を和・差に変形します：任意の実数 a, b について，

$$\begin{aligned}\cos a\cos b &= \frac{1}{2}\{\cos(a+b)+\cos(a-b)\}\ ,\\ \sin a\sin b &= -\frac{1}{2}\{\cos(a+b)-\cos(a-b)\}\ ,\\ \sin a\cos b &= \frac{1}{2}\{\sin(a+b)+\sin(a-b)\}\ .\end{aligned}$$

特に $a=b$ のとき，

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a)\ ,\qquad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a)\ ,\qquad \sin a\cos a = \frac{1}{2}\sin 2a\ .$$

例題　不定積分 $\int \cos^2 3t\,dt$ を計算する．

〔解説〕 三角関数の公式より $\cos^2 3t=\dfrac{1}{2}(1+\cos 6t)$ なので，

$$\int \cos^2 3t\,dt = \int \frac{1}{2}(1+\cos 6t)\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt+\int \cos 6t\,dt\right)\ .$$

変数 x を $x=6t$ とおく．$\dfrac{dx}{dt}=6$ なので $dt=\dfrac{1}{6}dx$ ．積分定数を C_0 とおくと，

$$\int \cos 6t\,dt = \int \cos x\frac{1}{6}dx = \frac{1}{6}\sin x+C_0 = \frac{1}{6}\sin 6t+C_0\ .$$

積分定数を C とおくと，

$$\int \cos^2 3t\,dt = \frac{1}{2}\left(\int 1\,dt+\int\cos 6t\,dt\right) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin 6t}{6}\right)+C = \frac{t}{2}+\frac{\sin 6t}{12}+C\ .$$

終

問題 7.6.5　不定積分 $\displaystyle\int \sin^2\frac{x}{6}\,dx$ を計算しなさい．

例題　不定積分 $\int \sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx$ を計算する．

〔解説〕 三角関数の公式より，

$$\begin{aligned}\sin(2x-3)\sin(5x+1) &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(-3x-4)\}\\ &= -\frac{1}{2}[\cos(7x-2)-\cos\{-(3x+4)\}]\\ &= -\frac{1}{2}\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\ .\end{aligned}$$

変数 y を $y=7x-2$ とおき，変数 z を $z=3x+4$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=7$ なので $dx=\dfrac{1}{7}dy$ ，$\dfrac{dz}{dx}=3$ なので $dx=\dfrac{1}{3}dz$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \sin(2x-3)\sin(5x+1)\,dx &= -\frac{1}{2}\int\{\cos(7x-2)-\cos(3x+4)\}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\left\{\int\cos(3x+4)\,dx-\int\cos(7x-2)\,dx\right\}dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\int\cos z\frac{1}{3}dz-\int\cos y\frac{1}{7}dy\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin z-\frac{1}{7}\sin y\right)+C\\ &= \frac{\sin(3x+4)}{6}-\frac{\sin(7x-2)}{14}+C\ .\end{aligned}$$

終

問題 7.6.6　以下の不定積分を計算しなさい．

(1) $\int \cos(2x-4)\cos(3x+2)\,dx$ ．　　(2) $\int \sin(7-3y)\cos(5y-2)\,dy$ ．