

§ 7.6 三角関数が現われる式の積分法

i) $f(\sin x)\cos x$, $f(\cos x)\sin x$ の形の式の積分

関数 f に対して、不定積分 $\int f(\sin x)\cos x dx$ の計算には次のような置換積分を用います：変数 x, y について $y = \sin x$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x dx = dy$ なので、

$$\int f(\sin x)\cos x dx = \int f(y) dy .$$

同様に、不定積分 $\int f(\cos x)\sin x dx$ の計算には次のような置換積分を用います：変数 x, y について $y = \cos x$ とおくと、 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ より $\sin x dx = -dy$ なので、

$$\int f(\cos x)\sin x dx = \int f(y)(-dy) = -\int f(y) dy .$$

例題 不定積分 $\int \sin x(\cos^3 x + 2) dx$ を計算する。

変数 y を $y = \cos x$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = (-dy)$. よって

$$\sin x(\cos^3 x + 2) dx = (\cos^3 x + 2)\sin x dx = (y^3 + 2)(-dy) = -(y^3 + 2) dy .$$

積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} \int \sin x(\cos^3 x + 2) dx &= -\int (y^3 + 2) dy = -\left(\frac{1}{4}y^4 + 2y\right) + C \\ &= -\frac{1}{4}\sin^4 x - 2\sin x + C . \end{aligned}$$

終

問題 7.6.1 不定積分 $\int \frac{\cos x}{3 + \sin^2 x} dx$ を計算しなさい。

被積分関数を $f(\sin x)\cos x$ または $f(\cos x)\sin x$ の形の式に変形するために次の事実を用いることがあります： $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より、

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x .$$

例題 不定積分 $\int \cos^3 x dx$ を計算する。

【解説】 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ なので、

$$\cos^3 x = \cos^2 x \cos x = (1 - \sin^2 x) \cos x .$$

変数 y を $y = \sin x$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = \cos x$ より $\cos x dx = dy$ なので、

$$\cos^3 x dx = (1 - \sin^2 x) \cos x dx = (1 - y^2) dy .$$

積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x dx &= \int (1 - y^2) dy = y - \frac{1}{3}y^3 + C = \sin x - \frac{1}{3}(\sin x)^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C . \end{aligned}$$

終

問題 7.6.2 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を計算しなさい。

正接関数 $\tan x$ が現われる式は、公式 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ によって変形します。

例題 不定積分 $\int \tan x(1 - \cos x) dx$ を計算する。

$$\tan x(1 - \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}(1 - \cos x) = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) .$$

変数 y を $y = \cos x$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = -\sin x$ なので $\sin x dx = -dy$. 積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} \int \tan x(1 - \cos x) dx &= \int \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) \sin x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{y} - 1 \right) (-dy) = \int \left(1 - \frac{1}{y} \right) dy = y - \ln|y| + C \\ &= \cos x - \ln|\cos x| + C . \end{aligned}$$

終

問題 7.6.3 不定積分 $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$ を計算しなさい。

定数 a, b に対して関数 $\sin x$ の1次式 $a\sin x + b$ 或いは関数 $\cos x$ の1次式 $a\cos x + b$ を置換することもあります。

例題 不定積分 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5} dx$ を計算する。

変数 y を $y = 3\cos x + 5$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = -3\sin x$ なので、 $\sin x dx = -\frac{1}{3}dy$. 積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x}{3\cos x + 5} dx &= \int \frac{1}{y} \left(-\frac{1}{3}dy \right) = -\frac{1}{3} \int \frac{1}{y} dy = -\frac{1}{3} \ln|y| + C \\ &= -\frac{1}{3} \ln|3\cos x + 5| + C . \end{aligned}$$

任意の実数 x について、 $\cos x \geq -1$ なので、 $3\cos x \geq -3$ 、 $3\cos x + 5 \geq 2$ 、よって $|3\cos x + 5| = 3\cos x + 5$. 故に $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 5} dx = -\frac{1}{3} \ln(3\cos x + 5) + C$.

終

問題 7.6.4 不定積分 $\int \frac{\cos x}{5\sin x - 7} dx$ を計算しなさい。

ii) 三角関数の積の積分

正弦関数や余弦関数の積を積分するときは、以下の公式を用いて三角関数の積を和・差に変形します：任意の実数 a, b について、

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a+b) + \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2} \{ \cos(a+b) - \cos(a-b) \} ,$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} \{ \sin(a+b) + \sin(a-b) \} .$$

特に $a = b$ のとき、

$$\sin^2 a = \frac{1}{2}(1 - \cos 2a), \quad \cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a), \quad \sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a .$$

例題 不定積分 $\int \cos^2 3t dt$ を計算する。

【解説】 三角関数の公式より $\cos^2 3t = \frac{1}{2}(1 + \cos 6t)$ なので、

$$\int \cos^2 3t dt = \int \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) .$$

変数 x を $x = 6t$ とおく。 $\frac{dx}{dt} = 6$ なので $dt = \frac{1}{6} dx$. 積分定数を C_0 とおくと、

$$\int \cos 6t dt = \int \cos x \frac{1}{6} dx = \frac{1}{6} \sin x + C_0 = \frac{1}{6} \sin 6t + C_0 .$$

積分定数を C とおくと、

$$\int \cos^2 3t dt = \frac{1}{2}(\int 1 dt + \int \cos 6t dt) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 6t}{6} \right) + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin 6t}{12} + C .$$

終

問題 7.6.5 不定積分 $\int \sin^2 \frac{x}{6} dx$ を計算しなさい。

例題 不定積分 $\int \sin(2x-3)\sin(5x+1) dx$ を計算する。

【解説】 三角関数の公式より、

$$\begin{aligned} \sin(2x-3)\sin(5x+1) &= -\frac{1}{2} \{ \cos(7x-2) - \cos(-3x-4) \} \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(7x-2) - \cos\{-3x+4\}] \\ &= -\frac{1}{2} \{ \cos(7x-2) - \cos(3x+4) \} . \end{aligned}$$

変数 y を $y = 7x-2$ とおき、変数 z を $z = 3x+4$ とおく。 $\frac{dy}{dx} = 7$ なので $dx = \frac{1}{7} dy$ 、 $\frac{dz}{dx} = 3$ なので $dx = \frac{1}{3} dz$. 積分定数を C とおくと、

$$\begin{aligned} \int \sin(2x-3)\sin(5x+1) dx &= -\frac{1}{2} \int \{ \cos(7x-2) - \cos(3x+4) \} dx \\ &= \frac{1}{2} \{ \int \cos(3x+4) dx - \int \cos(7x-2) dx \} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \cos z \frac{1}{3} dz - \int \cos y \frac{1}{7} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \sin z - \frac{1}{7} \sin y \right) + C \\ &= \frac{\sin(3x+4)}{6} - \frac{\sin(7x-2)}{14} + C . \end{aligned}$$

終

問題 7.6.6 以下の不定積分を計算しなさい。

$$(1) \int \cos(2x-4)\cos(3x+2) dx . \quad (2) \int \sin(7-3y)\cos(5y-2) dy .$$