

§ 7.7 一つの形の無理式の定積分

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ で表される関数を積分するために、置換積分法を用います。逆正弦関数について 0.9 節で述べたことを思い出して下さい： $-1 \leq X \leq 1$ となる各実数 X に対して $\sin^{-1}X$ の値が定義されて $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}X \leq \frac{\pi}{2}$ 。無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値が実数である範囲で考えるので、 $a^2-x^2 \geq 0$ 、 $x^2-a^2 \leq 0$ 、 $(x+a)(x-a) \leq 0$ 、 $-a \leq x \leq a$ 。 $-1 \leq \frac{x}{a} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ の値があります。変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ とおきます。 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a}$ なので、 $x = a \sin t$ 。 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ より $1 - \sin^2 t = \cos^2 t$ なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{a^2-x^2} &= \sqrt{a^2-(a \sin t)^2} = \sqrt{a^2-a^2 \sin^2 t} = \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)} = \sqrt{a^2} \sqrt{1-\sin^2 t} \\ &= a \sqrt{\cos^2 t}.\end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{a} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 、よって $\cos t \geq 0$ なので、 $\sqrt{\cos^2 t} = \cos t$ ；これより

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t.$$

また、 $x = a \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = a \cos t$ なので、 $dx = (a \cos t) dt$ 。

例解 定積分 $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$ を計算する。

$\sqrt{9-x^2}$ は実数なので、 $9-x^2 \geq 0$ 、 $x^2-9 \leq 0$ 、 $(x+3)(x-3) \leq 0$ 、 $-3 \leq x \leq 3$ 。 $-1 \leq \frac{x}{3} \leq 1$ なので $\sin^{-1}\frac{x}{3}$ の値があります。変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{3}$ ($-3 \leq x \leq 3$) とおく。 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}$ なので $x = 3 \sin t$ 。 $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ なので $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ 、よって $\cos t \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{9-x^2} &= \sqrt{9-(3 \sin t)^2} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)} = \sqrt{9} \sqrt{1-\sin^2 t} = 3 \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 3 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 3 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 3 \cos t$ なので $dx = 3 \cos t dt$ 。従って、

$$\sqrt{9-x^2} dx = 3 \cos t \cdot 3 \cos t dt = 9 \cos^2 t dt.$$

$x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ 、 $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$ 。故に、

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9 \cos^2 t dt = 9 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{9}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt \\ &= \frac{9}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin \pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{9\pi}{4}.\end{aligned}$$

終

問題 7.7.1 定積分 $\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx$ を計算しなさい。

例題 定積分 $\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx$ を計算する。

$6-3x^2 \geq 0$ なので、 $x^2 \leq 2$ 、 $x^2-2 \leq 0$ 、 $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) \leq 0$ 、 $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 。変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$ ($-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$) とおく。 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x = \sqrt{2} \sin t$ 。 $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{6-3x^2} &= \sqrt{6-3(\sqrt{2} \sin t)^2} = \sqrt{6-6 \sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{6} \sqrt{\cos^2 t} \\ &= \sqrt{6} \cos t.\end{aligned}$$

$x = \sqrt{2} \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = \sqrt{2} \cos t$ なので $dx = \sqrt{2} \cos t dt$ 。従って、

$$\sqrt{6-3x^2} dx = \sqrt{6} \cos t \sqrt{2} \cos t dt = 2\sqrt{3} \cos^2 t dt = \sqrt{3}(1+\cos 2t) dt.$$

$x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ 、 $x = 1$ のとき $t = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ 。

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{6-3x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{3}(1+\cos 2t) dt = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2t) dt \\ &= \sqrt{3} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}.\end{aligned}$$

終

問題 7.7.2 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2} dx$ を計算しなさい。

例題 定積分 $\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx$ を計算する。

$16-x^2 \geq 0$ なので、 $x^2-16 \leq 0$ 、 $(x+4)(x-4) \leq 0$ 、 $-4 \leq x \leq 4$ 。変数 t を $t = \sin^{-1}\frac{x}{4}$ ($-4 \leq x \leq 4$) とおく。 $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{4}\right) = \frac{x}{4}$ なので $x = 4 \sin t$ 。 $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{x}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned}\sqrt{16-x^2} &= \sqrt{16-(4 \sin t)^2} = \sqrt{16(1-\sin^2 t)} = \sqrt{16} \sqrt{1-\sin^2 t} = 4 \sqrt{\cos^2 t} \\ &= 4 \cos t.\end{aligned}$$

$x = 4 \sin t$ より $\frac{dx}{dt} = 4 \cos t$ なので、 $dx = 4 \cos t dt$ 。従って、

$$\sqrt{16-x^2} dx = 4 \cos t \cdot 4 \cos t dt = 16 \cos^2 t dt.$$

$x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ 、 $x = 3$ のとき $t = \sin^{-1}\frac{3}{4}$ 。故に、

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} 16 \cos^2 t dt = 16 \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\ &= 8 \int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} (1+\cos 2t) dt = 8 \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}} \\ &= 8 \left\{ \sin^{-1}\frac{3}{4} + \frac{\sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right)}{2} - 0 \right\} \\ &= 8 \sin^{-1}\frac{3}{4} + 4 \sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

$\sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する。公式 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ より、

$$\sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2 \sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right).$$

ここで

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4},$$

更に、

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1 - \sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16},$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\frac{3}{4} \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \geq 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

よって

$$\sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2 \sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3}{8} \sqrt{7}.$$

故に

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{16-x^2} dx &= 8 \sin^{-1}\frac{3}{4} + 4 \sin\left(2 \sin^{-1}\frac{3}{4}\right) = 8 \sin^{-1}\frac{3}{4} + 4 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{7} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{7} + 8 \sin^{-1}\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

終

問題 7.7.3 定積分 $\int_0^4 \sqrt{25-x^2} dx$ を計算しなさい。