§7.7　指数関数と三角関数との積の不定積分

定数 a, b に対して不定積分 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ 及び $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ を考えます.

$\boxed{\text{例解}}$　不定積分 $\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ と $\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ とを計算します. $\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x}$, $\dfrac{d}{dx}\sin 4x = 4\cos 4x$ なので，部分積分法により，

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}4\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ .$$

$\int e^{3x}dx = \dfrac{1}{3}e^{3x}$, $\dfrac{d}{dx}\cos 4x = -4\sin 4x$ なので，部分積分法により，

$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x - \frac{1}{3}\int e^{3x}(-4\sin 4x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\ .$$

こうして導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ ,$$
$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\ .\end{aligned}$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$ を加える. 積分定数を A_1, B_1, C_1 とおくと，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\sin 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x}\cos 4x + A_1\ ,\\ \frac{25}{9}\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= e^{3x}\Big(\frac{1}{3}\sin 4x - \frac{4}{9}\cos 4x\Big) + A_1\ ,\\ 25\int e^{3x}\sin 4x\,dx &= e^{3x}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + B_1\ ,\\ \int e^{3x}\sin 4x\,dx &= \frac{e^{3x}}{25}(3\sin 4x - 4\cos 4x) + C_1\ .\end{aligned}$$

また，先に導かれた 2 つの等式

$$\int e^{3x}\sin 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ ,$$
$$\int e^{3x}\cos 4x\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx$$

より，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\int e^{3x}\sin 4x\,dx\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{3}\Big(\frac{1}{3}e^{3x}\sin 4x - \frac{4}{3}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x - \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx\ .\end{aligned}$$

この等式の両辺に $\dfrac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx$ を加える. 積分定数を A_2, B_2, C_2 とおくと，

$$\begin{aligned}\int e^{3x}\cos 4x\,dx + \frac{16}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{1}{3}e^{3x}\cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x}\sin 4x + A_2\ ,\\ \frac{25}{9}\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= e^{3x}\Big(\frac{4}{9}\sin 4x + \frac{1}{3}\cos 4x\Big) + A_2\ ,\\ 25\int e^{3x}\cos 4x\,dx &= e^{3x}(4\sin 4x + 3\cos 4x) + B_2\ ,\\ \int e^{3x}\cos 4x\,dx &= \frac{e^{3x}}{25}(4\sin 4x + 3\cos 4x) + C_2\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.7.1}}$　不定積分 $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ と $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$ とを計算しなさい.

このようにして次の積分公式が導かれます.

定理　定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき，

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}),$$
$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx + a\cos bx) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$