§7.8 一つの形の無理式の定積分

正の定数 a に対して変数 x の無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の定積分を考えます． 逆正弦関数 $\sin^{-1}x$ について次のことを思い出して下さい（0.9 節参照）： $-1 \le x \le 1$ となる任意の実数 x に対して $\sin^{-1}x$ の値が定義されて $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}x \le \frac{\pi}{2}$ ． 変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{a}$ とおきます[3]． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)=\frac{x}{a}$ なので $x=a\sin t$ ． $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ より $1-\sin^2 t=\cos^2 t$ なので，

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}=\sqrt{a^2}\sqrt{1-\sin^2 t}$$
$$=a\sqrt{\cos^2 t}\ .$$

$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\frac{x}{a} \le \frac{\pi}{2}$ より $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ ，従って $\cos t \ge 0$ なので， $\sqrt{\cos^2 t}=\cos t$ ですから，

$$\sqrt{a^2-x^2}\ =\ a\cos t\ .$$

また， $x=a\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=a\cos t$ なので， $dx=(a\cos t)\,dt$ ．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx$ を計算する．

$9-x^2/ge0$ なので $-3 \le x \le 3$ ． 変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{3}$ （ $-3 \le x \le 3$ ）とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{3}$ なので $x=3\sin t$ ． $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \ge 0$ なので，

$$\sqrt{9-x^2}=\sqrt{9-(3\sin t)^2}=\sqrt{9(1-\sin^2 t)}=\sqrt{9}\sqrt{1-\sin^2 t}=3\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=3\cos t\ .$$

$x=3\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=3\cos t$ なので $dx=3\cos t\,dt$ ． 従って，

$$\sqrt{9-x^2}\,dx\ =\ 3\cos t\,3\cos t\,dt\ =\ 9\cos^2 t\,dt\ .$$

$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ， $x=3$ のとき $t=\sin^{-1}1=\frac{\pi}{2}$ ． 故に，

$$\int_0^3\sqrt{9-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}9\cos^2 t\,dt=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=\frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$
$$=\frac{9}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}-0\right)$$
$$=\frac{9\pi}{4}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.8.1}}$ 定積分 $\int_1^2\sqrt{4-x^2}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\int_0^1\sqrt{6-3x^2}\,dx$ を計算する．

$6-3x^2/ge0$ なので $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ ．

$$\int_0^1\sqrt{6-3x^2}\,dx\ =\ \int_0^1\sqrt{3(2-x^2)}\,dx\ =\ \sqrt{3}\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx\ .$$

変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}$ （ $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ ）とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{2}}$ なので $x=\sqrt{2}\sin t$ ． $-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}} \le \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \ge 0$ なので，

$$\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2-\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2}=\sqrt{2-2\sin^2 t}=\sqrt{2}\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{2}\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=\sqrt{2}\cos t\ .$$

$x=\sqrt{2}\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=\sqrt{2}\cos t$ なので $dx=\sqrt{2}\cos t\,dt$ ． 従って，

$$\sqrt{2-x^2}\,dx\ =\ \sqrt{2}\cos t\sqrt{2}\,\cos t\,dt\ =\ 2\cos^2 t\,dt\ =\ (1+\cos 2t)\,dt\ .$$

$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ， $x=1$ のとき $t=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}$ ．

$$\int_0^1\sqrt{6-3x^2}\,dx=\sqrt{3}\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\,dt$$
$$=\sqrt{3}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{4}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.8.2}}$ 定積分 $\int_{-1}^{\sqrt{3}}\sqrt{12-3x^2}\,dx$ を計算しなさい．

$\boxed{\text{例題}}$ 定積分 $\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx$ を計算する．

$16-x^2 \ge 0$ なので $-4 \le x \le 4$ ． 変数 t を $t=\sin^{-1}\frac{x}{4}$ （ $-4 \le x \le 4$ ）とおく． $\sin t=\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{4}\right)=\frac{x}{4}$ なので $x=4\sin t$ ． $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \ge 0$ なので，

$$\sqrt{16-x^2}=\sqrt{16-\left(4\sin t\right)^2}=\sqrt{16(1-\sin^2 t)}=\sqrt{16}\sqrt{1-\sin^2 t}=4\sqrt{\cos^2 t}$$
$$=4\cos t\ .$$

$x=4\sin t$ より $\frac{dx}{dt}=4\cos t$ なので， $dx=4\cos t\,dt$ ． 従って，

$$\sqrt{16-x^2}\,dx\ =\ 4\cos t\,4\cos t\,dt\ =\ 16\cos^2 t\,dt\ .$$

$x=0$ のとき $t=\sin^{-1}0=0$ ， $x=3$ のとき $t=\sin^{-1}\frac{3}{4}$ ． 故に，

$$\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx=\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}16\cos^2 t\,dt=16\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$=8\int_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}(1+\cos 2t)\,dt=8\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\sin^{-1}\frac{3}{4}}$$
$$=8\left\{\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)}{2}-0\right\}$$
$$=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ .$$

$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)$ を計算する． 公式 $\sin 2a=2\sin a\cos a$ より，

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ .$$

ここで

$$\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ \frac{3}{4}\ ,$$

更に，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ 1-\sin^2\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ 1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\ =\ \frac{7}{16}\ ,$$

$-\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1}\frac{3}{4} \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right) \ge 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ \sqrt{\frac{7}{16}}\ =\ \frac{\sqrt{7}}{4}\ .$$

よって

$$\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ 2\sin\left(\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\cos\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)\ =\ 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\ =\ \frac{3}{8}\sqrt{7}\ .$$

故に

$$\int_0^3\sqrt{16-x^2}\,dx=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+4\sin\left(2\sin^{-1}\frac{3}{4}\right)=8\sin^{-1}\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\sqrt{7}\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 7.8.3}}$ 定積分 $\int_0^4\sqrt{25-x^2}\,dx$ を計算しなさい．

---

[3] ここで無理式 $\sqrt{a^2-x^2}$ の値は実数ですから $a^2-x^2 \ge 0$ ， $x^2 \le a^2$ なので $\left(\frac{x}{a}\right)^2=\frac{x^2}{a^2} \le 1$ ，従って $-1 \le \frac{x}{a} \le 1$ ですから， $\sin^{-1}\frac{x}{a}$ の値が存在します．