

## 第7章の補遺 三角関数の累乗の積分

次の定理が成り立ちます。その証明は後にします。

**定理 7.補遺.1** 実数  $a$  と  $b$  とは  $\frac{\pi}{2}$  の整数倍であるとする。  $n \geq 2$  である自然数  $n$  に対して、

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

**例題** 定積分  $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx$  を計算する。

【解説】 定積分の下端  $0$  は  $0 = \frac{\pi}{2} \cdot 0$  , 上端  $\frac{3\pi}{2}$  は  $\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 3$  なので、定理 7.補遺.1 を使うことができる。

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx ,$$

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1 dx = [x]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} .$$

従って、

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{3}{4} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{16} .$$

**問題 7.補遺.1** 定積分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x dx$  を計算しなさい。

**例題** 定積分  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx$  を計算する。

【解答】 定理 7.補遺.1 より、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx ,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1 - 1 = -2 .$$

従って、

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{4}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x dx = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) = -\frac{16}{15} .$$

**問題 7.補遺.2** 定積分  $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x dx$  を計算しなさい。

一般的に自然数  $n$  に対する不定積分  $\int (\sin x)^n dx$  ,  $\int (\cos x)^n dx$  を計算するためには次の定理を用います。その証明は後にします。

**定理 7.補遺.2** 各自然数  $n$  に対して  $S_n = \int (\sin x)^n dx$  ,  $C_n = \int (\cos x)^n dx$  とおくと、  $n \geq 2$  となる自然数  $n$  に対して次の漸化式が成り立つ：

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} ,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

————— 定理の証明

先に定理 7.補遺.2 を証明します。

各自然数  $n$  に対して  $S_n = \int (\sin x)^n dx$  ,  $C_n = \int (\cos x)^n dx$  とおきます。  $n \geq 2$  とします。

漸化式  $S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \}$  を導きます。  $S_n = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx$  と考えて部分積分します。  $\frac{d}{dx} (\sin x)^{n-1} = (n-1) (\sin x)^{n-2} \cos x$  ,  $\int \sin x dx = -\cos x$  ですから、

$$S_n = \int (\sin x)^{n-1} \sin x dx = (\sin x)^{n-1} (-\cos x) - \int (n-1) (\sin x)^{n-2} \cos x (-\cos x) dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} \cos^2 x dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int (\sin x)^{n-2} (1 - \sin^2 x) dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \int \{ (\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n \} dx$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) \{ \int (\sin x)^{n-2} dx - \int (\sin x)^n dx \}$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) (S_{n-2} - S_n)$$

$$= -(\sin x)^{n-1} \cos x + (n-1) S_{n-2} - (n-1) S_n ,$$

$(n-1) S_n$  を移項して整理すると

$$n S_n = (n-1) S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x ,$$

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} .$$

同様の方法で漸化式  $C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \}$  を導きます。

$C_n = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx$  と考えて部分積分します。  $\frac{d}{dx} (\cos x)^{n-1} = (n-1) (\cos x)^{n-2} (-\sin x)$  ,  $\int \cos x dx = \sin x$  ですから、

$$C_n = \int (\cos x)^{n-1} \cos x dx = (\cos x)^{n-1} \sin x - \int (n-1) (\cos x)^{n-2} (-\sin x) \sin x dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} \sin^2 x dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int (\cos x)^{n-2} (1 - \cos^2 x) dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \int \{ (\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n \} dx$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) \{ \int (\cos x)^{n-2} dx - \int (\cos x)^n dx \}$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) (C_{n-2} - C_n)$$

$$= (\cos x)^{n-1} \sin x + (n-1) C_{n-2} - (n-1) C_n ,$$

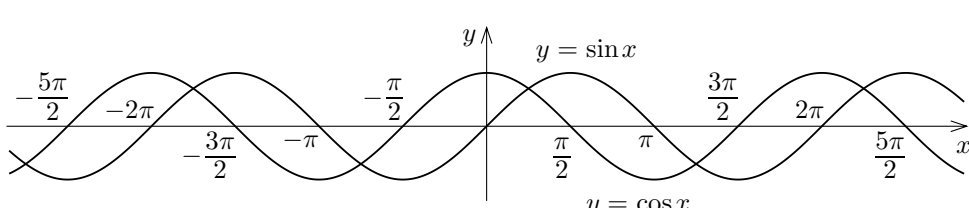
$(n-1) C_n$  を移項して整理すると

$$n C_n = (n-1) C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x ,$$

$$C_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) C_{n-2} + (\cos x)^{n-1} \sin x \} .$$

こうして定理 6.9.2 が証明されました。

定理 7.補遺.2 を用いて定理 7.補遺.1 を証明します。  $xy$  座標平面における  $y = \sin x$  のグラフと  $y = \cos x$  のグラフとを思い起こして下さい。



これらのグラフを見ると次のことが分かります：

実数  $x$  が  $\frac{\pi}{2}$  の整数倍であるならば、  $\sin x = 0$  または  $\cos x = 0$  .

実数  $a$  について  $a = \frac{\pi}{2} l$  となる整数  $l$  があるとします。このことより

$$\sin a = 0 \text{ または } \cos a = 0 .$$

実数  $b$  について  $b = \frac{\pi}{2} m$  となる整数  $m$  があるとします。このことより

$$\sin b = 0 \text{ または } \cos b = 0 .$$

自然数  $n$  について  $n \geq 2$  とします。  $S_n = \int (\sin x)^n dx$  について、定理 7.補遺.2 より

$$S_n = \frac{1}{n} \{ (n-1) S_{n-2} - (\sin x)^{n-1} \cos x \} = \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x .$$

従って、

$$[S_n]_a^b = \left[ \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b .$$

この等式の右辺は<sup>4)</sup>

$$\left[ \frac{n-1}{n} S_{n-2} - \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b = \left[ \frac{n-1}{n} S_{n-2} \right]_a^b - \left[ \frac{1}{n} (\sin x)^{n-1} \cos x \right]_a^b$$

$$= \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b ,$$

よって

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b - \frac{1}{n} [(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b .$$

右辺の  $[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b$  を計算します。  $\sin b = 0$  または  $\cos b = 0$  なので、

$$(\sin b)^{n-1} \cos b = 0 .$$

$\sin a = 0$  または  $\cos a = 0$  なので、

$$(\sin a)^{n-1} \cos a = 0 .$$

これらのことより

$$[(\sin x)^{n-1} \cos x]_a^b = (\sin b)^{n-1} \cos b - (\sin a)^{n-1} \cos a = 0 ,$$

従って

$$[S_n]_a^b = \frac{n-1}{n} [S_{n-2}]_a^b .$$

ここで、

$$[S_n]_a^b = \left[ \int (\sin x)^n dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx ,$$

$$[S_{n-2}]_a^b = \left[ \int (\sin x)^{n-2} dx \right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx ,$$

故に

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx .$$

同様にして次の等式も導かれます：

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_a^b (\cos x)^{n-2} dx .$$

こうして定理 7.補遺.1 が証明されました。

<sup>4)</sup> 実数  $a, b$  が関数  $F, G$  の定義域に属するとき、  $[kF(x)]_a^b = k[F(x)]_a^b$  ( $k$  は定数) ,  $[F(x) \pm G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b \pm [G(x)]_a^b$  (複号同順) .