

## 第7章の補遺1 指数関数と三角関数との積の不定積分

定数  $a, b$  に対して不定積分  $\int e^{ax} \sin bx dx$  及び  $\int e^{ax} \cos bx dx$  を考えます.

**例解** 不定積分  $\int e^{3x} \sin 4x dx$  と  $\int e^{3x} \cos 4x dx$  とを計算します.  $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ ,  $\frac{d}{dx} \sin 4x = 4 \cos 4x$  なので, 部分積分法により,

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} 4 \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx .$$

$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x}$ ,  $\frac{d}{dx} \cos 4x = -4 \sin 4x$  なので, 部分積分法により,

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x - \frac{1}{3} \int e^{3x} (-4 \sin 4x) dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx .$$

こうして導かれた2つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \sin 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx . \end{aligned}$$

この等式の両辺に  $\frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx$  を加えます. 積分定数を  $A_1, B_1, C_1$  とおくと,

$$\int e^{3x} \sin 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{9}e^{3x} \cos 4x + A_1 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \sin 4x dx = e^{3x} \left( \frac{1}{3} \sin 4x - \frac{4}{9} \cos 4x \right) + A_1 ,$$

$$25 \int e^{3x} \sin 4x dx = e^{3x} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + B_1 ,$$

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{e^{3x}}{25} (3 \sin 4x - 4 \cos 4x) + C_1 .$$

また, 先に導かれた2つの等式

$$\int e^{3x} \sin 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx$$

より,

$$\begin{aligned} \int e^{3x} \cos 4x dx &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \int e^{3x} \sin 4x dx \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{3} \left( \frac{1}{3}e^{3x} \sin 4x - \frac{4}{3} \int e^{3x} \cos 4x dx \right) \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x - \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx . \end{aligned}$$

この等式の両辺に  $\frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx$  を加えます. 積分定数を  $A_2, B_2, C_2$  とおくと,

$$\int e^{3x} \cos 4x dx + \frac{16}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{1}{3}e^{3x} \cos 4x + \frac{4}{9}e^{3x} \sin 4x + A_2 ,$$

$$\frac{25}{9} \int e^{3x} \cos 4x dx = e^{3x} \left( \frac{4}{9} \sin 4x + \frac{1}{3} \cos 4x \right) + A_2 ,$$

$$25 \int e^{3x} \cos 4x dx = e^{3x} (4 \sin 4x + 3 \cos 4x) + B_2 ,$$

$$\int e^{3x} \cos 4x dx = \frac{e^{3x}}{25} (4 \sin 4x + 3 \cos 4x) + C_2 . \quad \text{終}$$

**問題7.補遺1.1** 不定積分  $\int e^{2x} \sin 3x dx$  と  $\int e^{2x} \cos 3x dx$  とを計算しなさい.

このようにして次の積分公式が導かれます.

**定理** 定数  $a, b$  について  $a \neq 0$  または  $b \neq 0$  のとき,

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C_1 \quad (C_1 \text{ は積分定数}),$$

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C_2 \quad (C_2 \text{ は積分定数}).$$