第7章の補遺2　三角関数の累乗の積分

次の定理が成り立ちます．その証明は後にします．

定理 7. 補遺 2.1　実数 a と b とは $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるとする．$n \geq 2$ である自然数 n に対して，

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ ,$$
$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

例題　定積分 $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx$ を計算する．

〔解説〕 定積分の下端 0 及び上端 $\frac{3\pi}{2}$ は $\frac{\pi}{2}$ の整数倍なので，定理 7. 補遺.1 を使うことができる．

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx \ ,$$
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx \ ,$$
$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 1\,dx = \big[x\big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} \ .$$

従って，

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^4 x\,dx = \frac{3}{4}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin^0 x\,dx = \frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{3\pi}{2} = \frac{9\pi}{16} \ . \qquad \boxed{終}$$

問題 7.補遺2.1　定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos^4 x\,dx$ を計算しなさい．

例題　定積分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$ を計算する．

〔解答〕 定理 7. 補遺.1 より，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx \ ,$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx \ ,$$
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\,dx = \big[\sin x\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -1-1 = -2 \ .$$

従って，

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \frac{4}{5}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^3 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^1 x\,dx = \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot(-2) = -\frac{16}{15} \ . \qquad \boxed{終}$$

問題 7.補遺2.2　定積分 $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 x\,dx$ を計算しなさい．

一般的に自然数 n に対する不定積分 $\int(\sin x)^n dx$，$\int(\cos x)^n dx$ を計算するためには次の定理を用います．その証明は後にします．

定理 7. 補遺 2.2　各自然数 n に対して $S_n = \int(\sin x)^n dx$，$C_n = \int(\cos x)^n dx$ とおくと，$n \geq 2$ となる自然数 n に対して次の漸化式が成り立つ：

$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} \ ,$$
$$C_n = \frac{1}{n}\{(n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1}\sin x\} \ .$$

――――― 定理の証明

先に定理 7. 補遺 2.2 を証明します．

各自然数 n に対して $S_n = \int(\sin x)^n dx$，$C_n = \int(\cos x)^n dx$ とおきます．$n \geq 2$ とします．

漸化式 $S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\}$ を導きます．$S_n = \int(\sin x)^n dx = \int(\sin x)^{n-1}\sin x\,dx$ と考えて部分積分します．$\frac{d}{dx}(\sin x)^{n-1} = (n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x$，$\int \sin x\,dx = -\cos x$ ですから，

$$\begin{aligned}
S_n &= \int(\sin x)^{n-1}\sin x\,dx = (\sin x)^{n-1}(-\cos x) - \int(n-1)(\sin x)^{n-2}\cos x\,(-\cos x)dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int(\sin x)^{n-2}\cos^2 x\,dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int(\sin x)^{n-2}(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\int\{(\sin x)^{n-2} - (\sin x)^n\}\,dx \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)\{\int\{(\sin x)^{n-2}dx - \int(\sin x)^n\,dx\} \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n) \\
&= -(\sin x)^{n-1}\cos x + (n-1)S_{n-2} - (n-1)S_n \ ,
\end{aligned}$$

$(n-1)S_n$ を移項して整理すると

$$nS_n = (n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x \ ,$$
$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} \ .$$

同様の方法で漸化式 $C_n = \frac{1}{n}\{(n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1}\sin x\}$ を導きます．$C_n = \int(\cos x)^n dx = \int(\cos x)^{n-1}\cos x\,dx$ と考えて部分積分します．$\frac{d}{dx}(\cos x)^{n-1} = (n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)$，$\int\cos x\,dx = \sin x$ ですから，

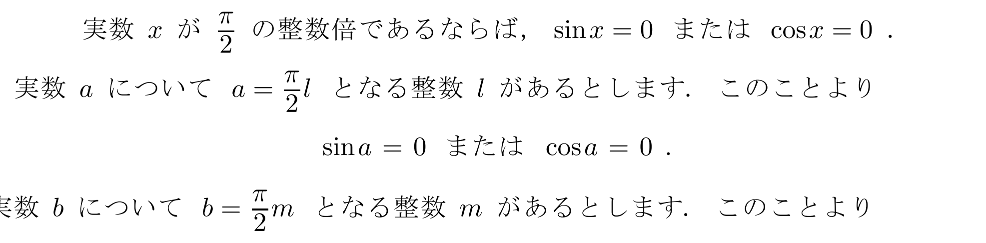
$$\begin{aligned}
C_n &= \int(\cos x)^{n-1}\cos x\,dx = (\cos x)^{n-1}\sin x - \int(n-1)(\cos x)^{n-2}(-\sin x)\sin x\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)\int(\cos x)^{n-2}\sin^2 x\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)\int(\cos x)^{n-2}(1-\cos^2 x)\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)\int\{(\cos x)^{n-2} - (\cos x)^n\}\,dx \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)\{\int\{(\cos x)^{n-2}dx - \int(\cos x)^n\,dx\} \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)(C_{n-2} - C_n) \\
&= (\cos x)^{n-1}\sin x + (n-1)C_{n-2} - (n-1)C_n \ ,
\end{aligned}$$

$(n-1)C_n$ を移項して整理すると

$$nC_n = (n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1}\sin x \ ,$$
$$C_n = \frac{1}{n}\{(n-1)C_{n-2} + (\cos x)^{n-1}\sin x\} \ .$$

こうして定理 6.9.2 が証明されました．

定理 7. 補遺 2.2 を用いて定理 7. 補遺 2.1 を証明します．xy 座標平面における $y = \sin x$ のグラフと $y = \cos x$ のグラフとを思い起こして下さい．



これらのグラフを見ると次のことが分かります：

　実数 x が $\frac{\pi}{2}$ の整数倍であるならば，$\sin x = 0$ または $\cos x = 0$ ．

実数 a について $a = \frac{\pi}{2}l$ となる整数 l があるとします．このことより

$$\sin a = 0 \ \text{または} \ \cos a = 0 \ .$$

実数 b について $b = \frac{\pi}{2}m$ となる整数 m があるとします．このことより

$$\sin b = 0 \ \text{または} \ \cos b = 0 \ .$$

自然数 n について $n \geq 2$ とします．$S_n = \int(\sin x)^n dx$ について，定理 7. 補遺.2 より

$$S_n = \frac{1}{n}\{(n-1)S_{n-2} - (\sin x)^{n-1}\cos x\} = \frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x \ .$$

従って，

$$\big[S_n\big]_a^b = \left[\frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \ .$$

この等式の右辺は [3]

$$\begin{aligned}
\left[\frac{n-1}{n}S_{n-2} - \frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b &= \left[\frac{n-1}{n}S_{n-2}\right]_a^b - \left[\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x\right]_a^b \\
&= \frac{n-1}{n}\big[S_{n-2}\big]_a^b - \frac{1}{n}\big[(\sin x)^{n-1}\cos x\big]_a^b \ ,
\end{aligned}$$

よって

$$\big[S_n\big]_a^b = \frac{n-1}{n}\big[S_{n-2}\big]_a^b - \frac{1}{n}\big[(\sin x)^{n-1}\cos x\big]_a^b \ .$$

右辺の $\big[(\sin x)^{n-1}\cos x\big]_a^b$ を計算します．$\sin b = 0$ または $\cos b = 0$ なので，

$$(\sin b)^{n-1}\cos b = 0 \ .$$

$\sin a = 0$ または $\cos a = 0$ なので，

$$(\sin a)^{n-1}\cos a = 0 \ .$$

これらのことより

$$\big[(\sin x)^{n-1}\cos x\big]_a^b = (\sin b)^{n-1}\cos b - (\sin a)^{n-1}\cos a = 0 \ ,$$

従って

$$\big[S_n\big]_a^b = \frac{n-1}{n}\big[S_{n-2}\big]_a^b \ .$$

ここで，

$$\big[S_n\big]_a^b = \left[\int(\sin x)^n dx\right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^n dx \ ,$$
$$\big[S_{n-2}\big]_a^b = \left[\int(\sin x)^{n-2} dx\right]_a^b = \int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ ,$$

故に

$$\int_a^b (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\sin x)^{n-2} dx \ .$$

同様にして次の等式も導かれます：

$$\int_a^b (\cos x)^n dx = \frac{n-1}{n}\int_a^b (\cos x)^{n-2} dx \ .$$

こうして定理 7. 補遺 2.1 が証明されました．

---

[3] 実数 a, b が関数 F, G の定義域に属すとき，$\big[kF(x)\big]_a^b = k\big[F(x)\big]_a^b$ （ k は定数），$\big[F(x) \pm G(x)\big]_a^b = \big[F(x)\big]_a^b \pm \big[G(x)\big]_a^b$ （複号同順）．