§8.0　関数のリーマン和

実数 a, b について $a \le b$ で，関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとします． 正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ をとり，

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}\ ,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおきます． $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ のとき，関数 f のリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が f 及び a, b だけから唯一つに決まるならば，その極限値が関数 f の定積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ でした： $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ ．

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき，定積分の定義より， $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して， $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$ となる実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ は変わりません． そこで， $\xi_k = x_k$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ）とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}\ .$$

また別に，$\xi_k = x_{k-1}$ （ $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ ） とすると，リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}\ .$$

この章では， 関数 f の定積分を計算するために， f のリーマン和として $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^{n}\{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ をよく用います．