

§ 8.0 関数のリーマン和

実数 a, b について $a \leq b$ で、関数 f の定義域は区間 $[a, b]$ を含むとします。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ をとり、

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\},$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}$$

とおきます。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ のとき、関数 f のリーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が f 及び a, b だけから唯一つに決まるならば、その極限值が関数 f の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ でした：
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

関数 f が a から b まで定積分可能であるとき、定積分の定義より、 $k = 1, 2, 3, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ となる実数 ξ_k をどのように定めてもリーマン和 S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ は変わりません。そこで、 $\xi_k = x_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}.$$

また別に、 $\xi_k = x_{k-1}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) とすると、リーマン和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} = \sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

この章では、関数 f の定積分を計算するために、 f のリーマン和として

$\sum_{k=1}^n \{f(x_k)(x_k - x_{k-1})\}$ 或いは $\sum_{k=1}^n \{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}$ を用います。