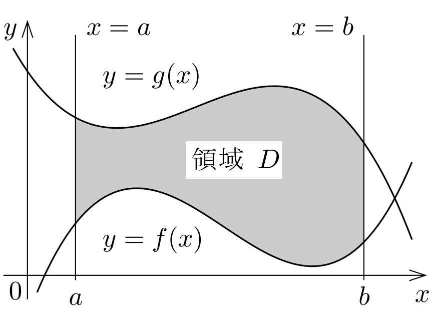
§8.1　平面図形の面積

6.2 節で述べた定積分と面積との関係を更に発展させます.

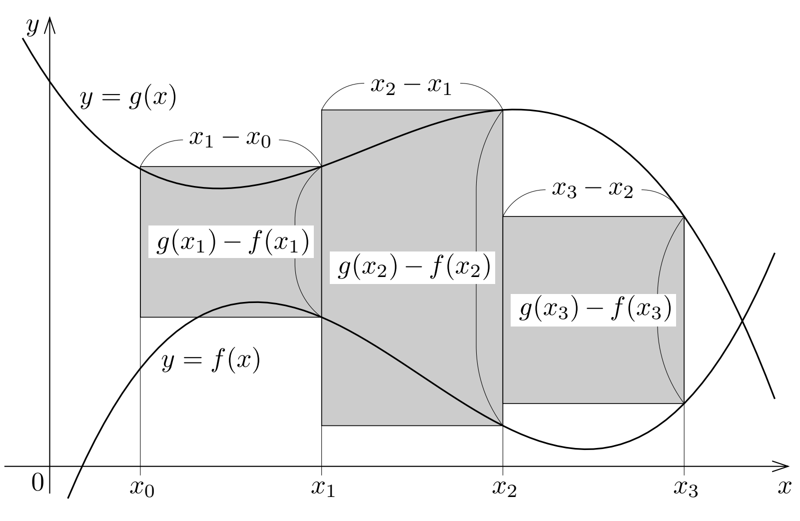
実数 a と b とについて $a \le b$ とします. また, 関数 f と g とは a から b まで積分可能で, 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ とします. xy 座標平面において, 連立不等式

$$a \le x \le b \text{ かつ } f(x) \le y \le g(x)$$

で表される領域を D とおきます.



$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 = b$ となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3 をとります.



上図の網掛けの図形の面積つまり長方形の領域 3 個を併せた図形の面積 S_3 は

$$\begin{aligned} S_3 &= \{g(x_1)-f(x_1)\}(x_1-x_0)+\{g(x_2)-f(x_2)\}(x_2-x_1)+ \\ &\qquad\qquad \{g(x_3)-f(x_3)\}(x_3-x_2) \\ &= \sum_{k=1}^{3}\left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\right] . \end{aligned}$$

正の各自然数 n に対して,

$$a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとります.

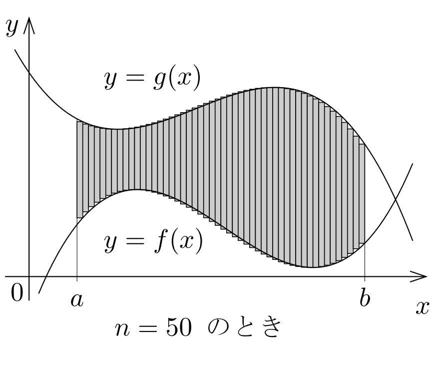
$$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\}$$

について, $n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とします. 右図の網掛けの図形の面積, つまり長方形の領域 n 個を併せた図形の面積 S_n は

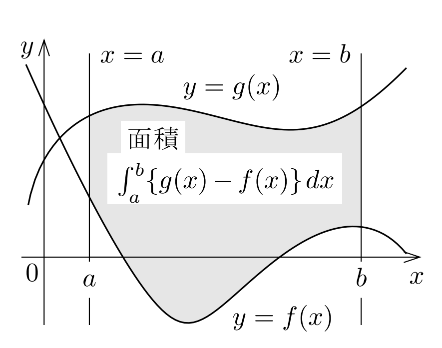
$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left[\{g(x_k)-f(x_k)\}(x_k-x_{k-1})\right] ;$$

これは関数 $g(x)-f(x)$ のリーマン和です. 関数 $f(x)$ と $g(x)$ とは a から b まで積分可能なので, 関数 $g(x)-f(x)$ も a から b まで積分可能です（定理 6.9.1）. よって,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx .$$



$n = 20$ のとき



$n = 50$ のとき

$n \to \infty$ とすると, 長方形の領域 n 個を併せた図形の面積 S_n は領域 D の面積に近づきます ; そして, その極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が D の面積になります. 従って, 領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx$ です.

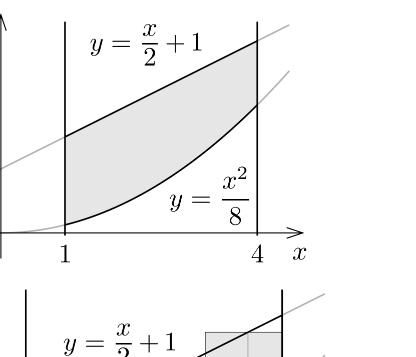
このようにして次の定理が成り立ちます.

定理 8.1　実数 a と b とについて $a \le b$ とする. また, 関数 f と g とは a から b まで積分可能で, 区間 $[a,b]$ の各実数 x について $f(x) \le g(x)$ とする. xy 座標平面において連立不等式

$$a \le x \le b \text{ かつ } f(x) \le y \le g(x)$$

で表される領域の面積は

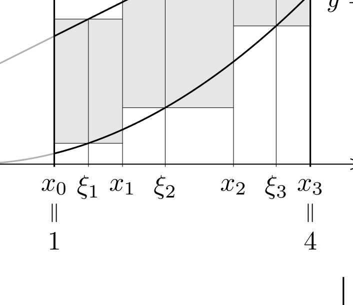
$$\int_a^b \{g(x)-f(x)\}\,dx .$$



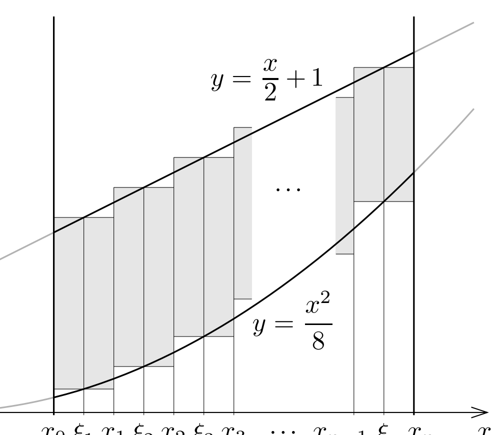
$\boxed{\text{問題 8.1.1}}$　xy 座標平面において連立不等式

$$1 \le x \le 4 \text{ かつ } \frac{x^2}{8} \le y \le \frac{x}{2}+1$$

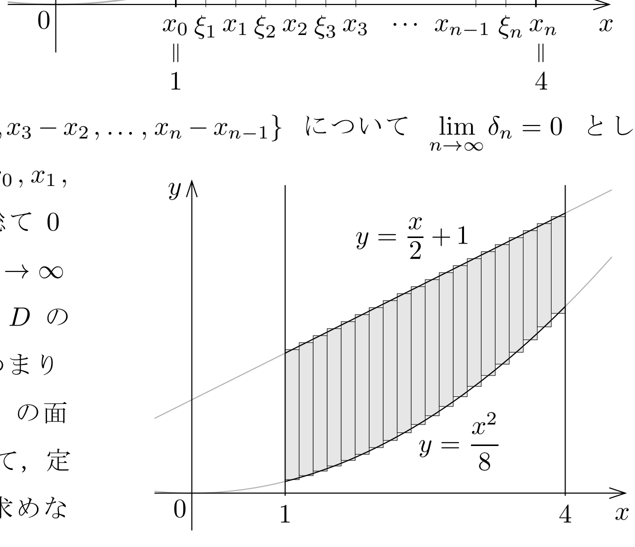
で表される領域 D の面積を求めます.



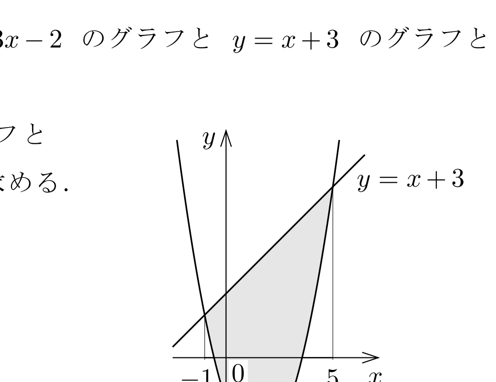
(1)　$1 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le x_3 = 4$ である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び $x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3$ である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して, 右図の網掛けされた 3 個の長方形を併せた領域の面積 S_3 を表す式を記しなさい.



(2)　変数 n を正の自然数とします. $1 = x_0 \le \xi_1 \le x_1 \le \xi_2 \le x_2 \le \xi_3 \le x_3 \le \cdots \le x_{n-1} \le \xi_n \le x_n = 4$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して, 右図のような網掛けされた n 個の長方形を併せた領域の面積 S_n を表す式を記しなさい. またこの式を何というか記しなさい.



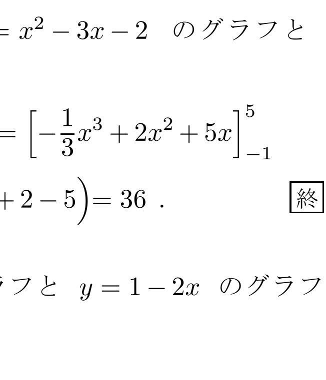
(3)　$\delta_n = \max\{x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \dots, x_n-x_{n-1}\}$ について $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$ とします ; つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に限りなく近付くとします. $n \to \infty$ のとき S_n は右図のように領域 D の面積に限りなく近づきます ; つまり S_n の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ が領域 D の面積になります. このことを用いて, 定積分によって領域 D の面積を求めなさい.



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = x^2-3x-2$ のグラフと $y = x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求める.

〔解説〕　まず, $y = x^2-3x-2$ のグラフと $y = x+3$ のグラフとの共有点の x 座標を求める. $x^2-3x-2 = x+3$ とすると,

$$x^2-4x-5 = 0 ,$$
$$(x+1)(x-5) = 0 ,$$
$$x = -1, 5 .$$



$y = x^2-3x-2$ のグラフと $y = x+3$ のグラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の 2 つである.

$-1 \le x \le 5$ のとき $x^2-3x-2 \le x+3$. 従って, $y = x^2-3x-2$ のグラフと $y = x+3$ のグラフとで囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{5} \{(x+3)-(x^2-3x-2)\}\,dx &= \int_{-1}^{5}(-x^2+4x+5)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2+5x\right]_{-1}^{5} \\ &= -\frac{125}{3}+50+25-\left(\frac{1}{3}+2-5\right) = 36 . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

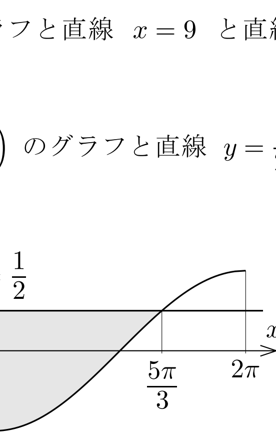
$\boxed{\text{問題 8.1.2}}$　xy 座標平面において関数 $y = 9-x^2$ のグラフと $y = 1-2x$ のグラフとで囲まれる領域の面積を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで囲まれる領域 D の面積を求める.

〔解説〕 まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標を求める. $y = e^x$ かつ $y = 3$ とすると, $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$. 関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 5$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である. D の点の x 座標の範囲は $0 \le x \le \ln 3$ であり, このとき $e^x \le e^{\ln 3} = 3$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 3}(3-e^x)\,dx &= \left[3x-e^x\right]_0^{\ln 3} = 3\ln 3 - e^{\ln 3} - (-1) \\ &= 3\ln 3 - 2 . \end{aligned}$$

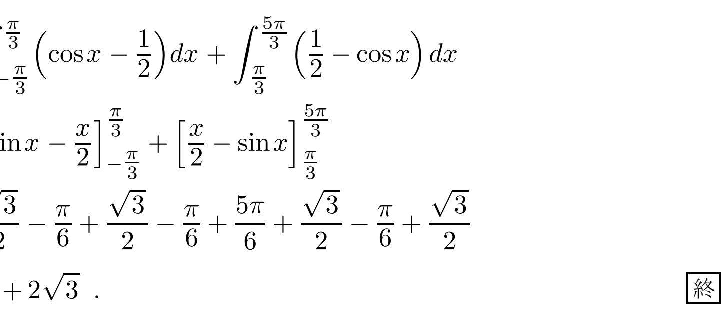
$\boxed{\text{終}}$



$\boxed{\text{問題 8.1.3}}$　xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求める.

まず関数 $y = \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi \right)$ のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$ との共有点の x 座標を求める. $\cos x = \frac{1}{2}$ かつ $-\frac{\pi}{2} \le x \le 2\pi$ とすると, $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. $-\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \ge \frac{1}{2}$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \le \frac{1}{2}$. 面積は



$$\begin{aligned} &\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}-\cos x\right)dx \\ &= \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2}-\sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{3}+2\sqrt{3} . \end{aligned}$$

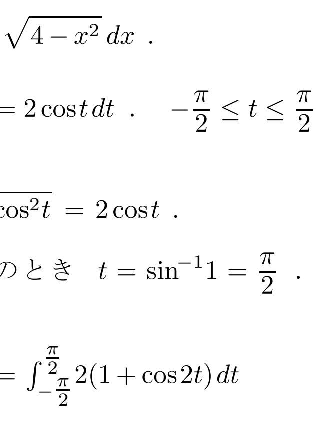
$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.4}}$　xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ $\left(0 \le x \le \frac{5\pi}{2} \right)$ のグラフと直線 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1$ で表される領域の面積を求める.

不等式 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1$ より, $\frac{x^2}{4} \le 1-\frac{y^2}{9} \le 1$, $x^2 \le 4$, $-2 \le x \le 2$. $y^2 \le 9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$ なので,

$$-\sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} \le y \le \sqrt{9\left(1-\frac{x^2}{4}\right)} ,$$
$$-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} \le y \le \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2} .$$



従って, 不等式 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1$ で表される領域の面積は

$$\int_{-2}^{2}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}-\left(-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\right)\right\}dx = 3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx .$$

$t = \sin^{-1}\frac{x}{2}$ とおく. $x = 2\sin t$. $\frac{dx}{dt} = 2\cos t$ より $dx = 2\cos t\,dt$. $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$ より $\cos t \ge 0$ なので,

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t .$$

また, $x = -2$ のとき $t = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $x = 2$ のとき $t = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$. よって,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\, 2\cos t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1+\cos 2t)\,dt \\ &= \left[2t+\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi+\sin\pi-\{-\pi+\sin(-\pi)\} \\ &= 2\pi . \end{aligned}$$

故に, 不等式 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} \le 1$ で表される領域の面積は,

$$3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = 3\cdot 2\pi = 6\pi .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.1.5}}$　定数 a, b について $a > 0$, $b > 0$ とします. xy 座標平面において不等式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \le 1$ で表される領域の面積を求めなさい.