

## §8.1 平面図形の面積

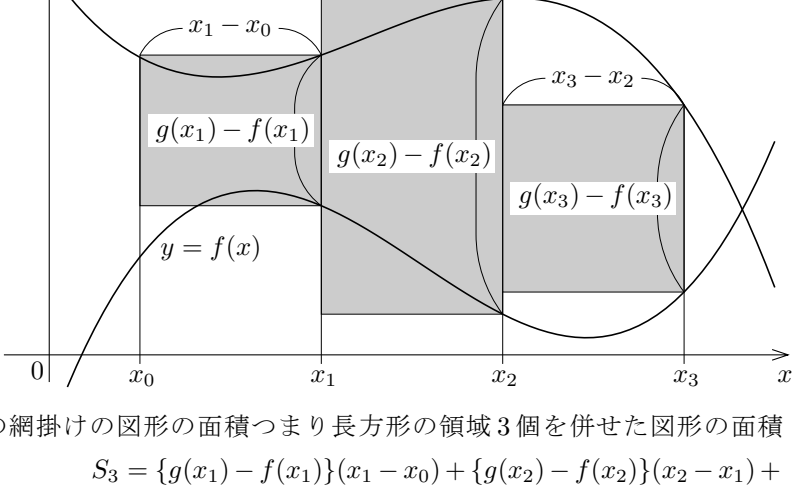
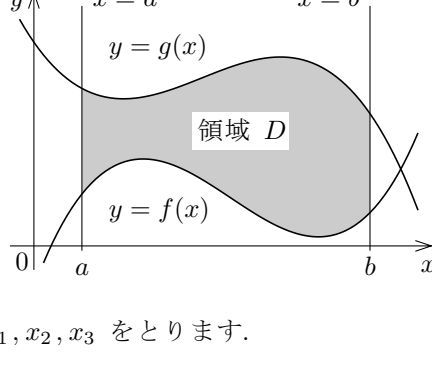
6.2節で述べた定積分と面積との関係を更に発展させます。

実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とします。また、関数  $f$  と  $g$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能で、区間  $[a, b]$  の各実数  $x$  について  $f(x) \leq g(x)$  とします。  $xy$  座標平面において、連立不等式

$$a \leq x \leq b \quad \text{かつ} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域を  $D$  とおきます。

$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$  となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3$  をとります。



上図の網掛けの図形の面積つまり長方形の領域3個を併せた図形の面積  $S_3$  は

$$S_3 = \{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2) \\ = \sum_{k=1}^3 \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1}) .$$

正の各自然数  $n$  に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

となる実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  をとります。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\delta_n \rightarrow 0$  とします。

右図の網掛けの図形の面積、つまり長方形の領域  $n$  個を併せた図形の面積  $S_n$  は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1}) ;$$

これは関数  $g(x) - f(x)$  のリーマン和です。

関数  $f(x)$  と  $g(x)$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能なので、関数  $g(x) - f(x)$  も  $a$  から  $b$  まで積分可能です (定理6.9.1)。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx .$$

$n \rightarrow \infty$  とすると、長方形の領域  $n$  個を併せた図形の面積  $S_n$  は領域  $D$  の面積に近づきます；そして、その極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が  $D$  の面積になります。従って、領域  $D$  の面積は定積分  $\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$  です。

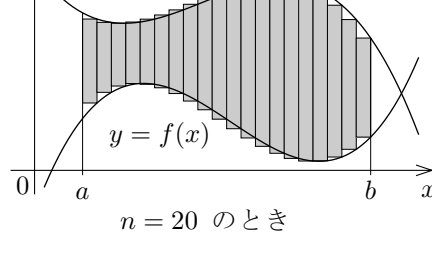
このようにして次の定理が成り立ちます。

**定理8.1** 実数  $a$  と  $b$  について  $a \leq b$  とする。また、関数  $f$  と  $g$  とは  $a$  から  $b$  まで積分可能で、区間  $[a, b]$  の各実数  $x$  について  $f(x) \leq g(x)$  とする。  $xy$  座標平面において連立不等式

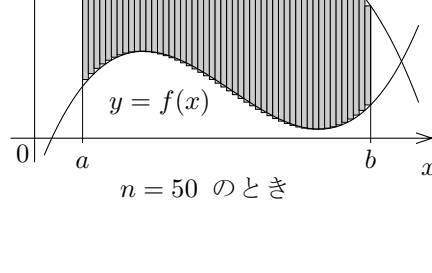
$$a \leq x \leq b \quad \text{かつ} \quad f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

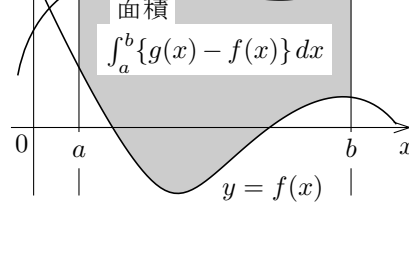
$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx .$$



$n = 20$  のとき



$n = 50$  のとき



**問題8.1.1**  $xy$  座標平面において連立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \quad \text{かつ} \quad \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

で表される領域  $D$  の面積を求めます。

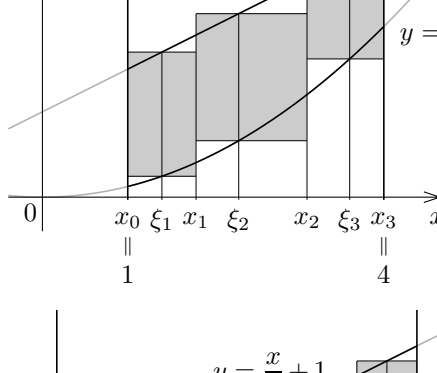
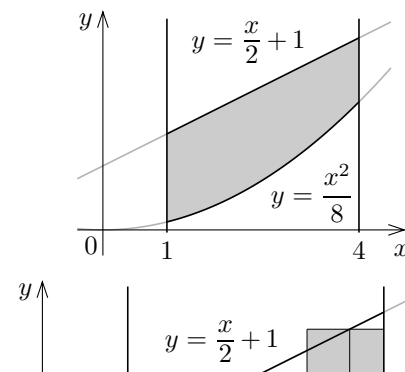
(1)  $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$

である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3$  及び

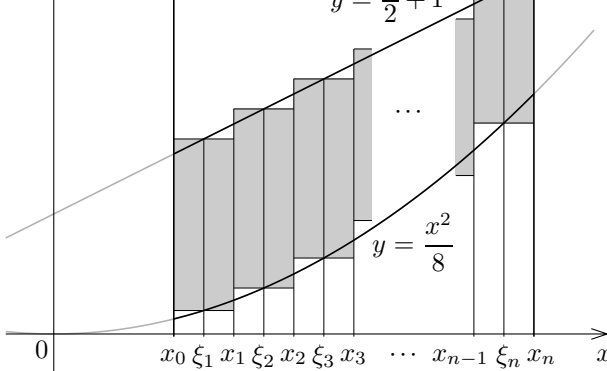
$x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$

である実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  に対して、

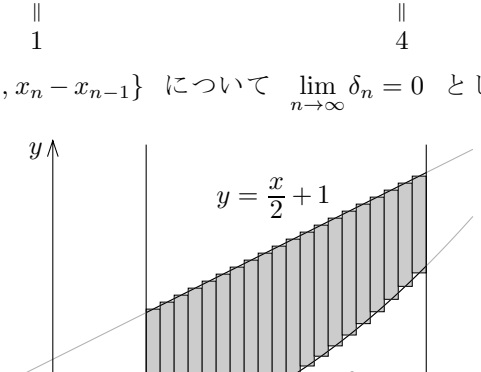
右図の網掛けされた3個の長方形を併せた領域の面積  $S_3$  を表す式を記しなさい。



(2) 変数  $n$  を正の自然数とします。  $1 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$  である実数  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  及び実数  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$  に対して、右図のような網掛けされた  $n$  個の長方形を併せた領域の面積  $S_n$  を表す式を記しなさい。またこの式を何というか記しなさい。



(3)  $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$  について  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$  とします；つまり  $n \rightarrow \infty$  のとき  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$  の間隔は総て0に限りなく近付くとします。  $n \rightarrow \infty$  のとき  $S_n$  は右図のように領域  $D$  の面積に限りなく近づきます；つまり  $S_n$  の極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  が領域  $D$  の面積になります。このことを用いて、定積分によって領域  $D$  の面積を求めなさい。



**例題**  $xy$  座標平面において関数  $y = x^2 - 3x - 2$  のグラフと  $y = x + 3$  のグラフとで囲まれる領域の面積を求めなさい。

【解説】 まず、  $y = x^2 - 3x - 2$  のグラフと  $y = x + 3$  のグラフとの共有点の  $x$  座標を求めます。

$x^2 - 3x - 2 = x + 3$  とすると、

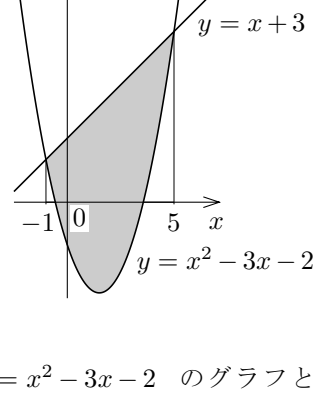
$$x^2 - 4x - 5 = 0 ,$$

$$(x+1)(x-5) = 0 ,$$

$$x = -1, 5 .$$

$y = x^2 - 3x - 2$  のグラフと  $y = x + 3$  のグラフとの共有点の  $x$  座標は  $-1$  と  $5$  の2つである。

$-1 \leq x \leq 5$  のとき  $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$  . 従って、  $y = x^2 - 3x - 2$  のグラフと  $y = x + 3$  のグラフとで囲まれる領域の面積は



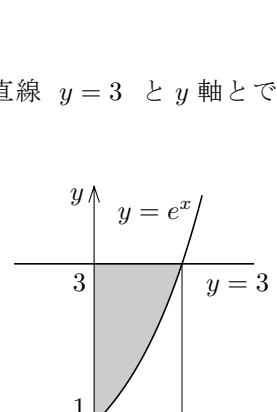
$$\int_{-1}^5 \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\} dx = \int_{-1}^5 \{-x^2 + 4x + 5\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x\right]_{-1}^5 \\ = -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5\right) = 36 . \quad \text{終}$$

**問題8.1.2**  $xy$  座標平面において関数  $y = 9 - x^2$  のグラフと  $y = 1 - 2x$  のグラフとで囲まれる領域の面積を求めなさい。

**例題**  $xy$  座標平面において指数関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = 3$  と  $y$  軸とで囲まれる領域  $D$  の面積を求めなさい。

【解説】 まず関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = 3$  との共有点の  $x$  座標を求めます。  $y = e^x$  かつ  $y = 3$  とすると、  $e^x = 3$  なので  $x = \ln 3$  . 関数  $y = e^x$  のグラフと直線  $y = 3$  との共有点の  $x$  座標は  $\ln 3$  である。

$D$  の点の  $x$  座標の範囲は  $0 \leq x \leq \ln 3$  であり、このとき  $e^x \leq e^{\ln 3} = 3$  . 領域  $D$  の面積は



$$\int_0^{\ln 3} (3 - e^x) dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = 3 \ln 3 - e^{\ln 3} - (-1) \\ = 3 \ln 3 - 3 . \quad \text{終}$$

**問題8.1.3**  $xy$  座標平面において対数関数  $y = \ln x$  のグラフと直線  $x = 9$  と直線  $y = 2$  とで囲まれる領域  $D$  の面積を求めなさい。

**例題**  $xy$  座標平面において関数  $y = \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ ) のグラフと直線  $y = \frac{1}{2}$  とで囲まれる領域の面積を求めなさい。

まず関数  $y = \cos x$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ ) の

グラフと直線  $y = \frac{1}{2}$  との共有点の  $x$  座標

を求めます。  $\cos x = \frac{1}{2}$

かつ  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$  とすると、  $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$  .  $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$  のとき  $\cos x \geq \frac{1}{2}$  ,

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$  のとき  $\cos x \leq \frac{1}{2}$  . 面積は

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x\right) dx \\ = \left[\sin x - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3} . \quad \text{終}$$

**問題8.1.4**  $xy$  座標平面において関数  $y = \sin x$  ( $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ ) のグラフと直線  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  とで囲まれる領域の面積を求めなさい。

**例題**  $xy$  座標平面において不等式  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  で表される領域の面積を求めなさい。

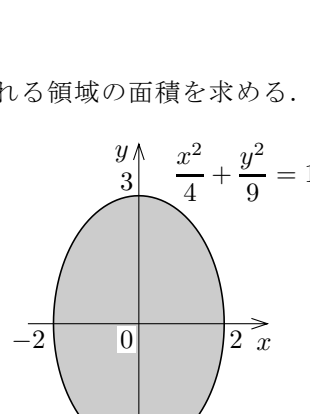
不等式  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  より、  $\frac{x^2}{4} \leq 1 - \frac{y^2}{9} \leq 1$  ,

$x^2 \leq 4$  ,  $-2 \leq x \leq 2$  .  $y^2 \leq 9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$  なので、

$$-\sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} \leq y \leq \sqrt{9\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)} ,$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} .$$

従って、不等式  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  で表される領域の面積は



$$\int_{-2}^2 \left\{ \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} - \left(-\frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right) \right\} dx = 3 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx .$$

$t = \sin^{-1} \frac{x}{2}$  とおく。  $x = 2 \sin t$  .  $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$  より  $dx = 2 \cos t dt$  .  $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  より  $\cos t \geq 0$  なので、

$$\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = 2\sqrt{1 - \sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2 \cos t .$$

また、  $x = -2$  のとき  $t = \sin^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{2}$  ,  $x = 2$  のとき  $t = \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}$  .

よって、

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \cdot 2 \cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(1 + \cos 2t) dt \\ = [2t + \sin 2t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi + \sin \pi - \{-\pi + \sin(-\pi)\} \\ = 2\pi .$$

故に、不等式  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$  で表される領域の面積は、

$$3 \int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 3 \cdot 2\pi = 6\pi . \quad \text{終}$$

**問題8.1.5** 定数  $a, b$  について  $a > 0$  ,  $b > 0$  とします。  $xy$  座標平面において不等式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$  で表される領域の面積を求めなさい。