

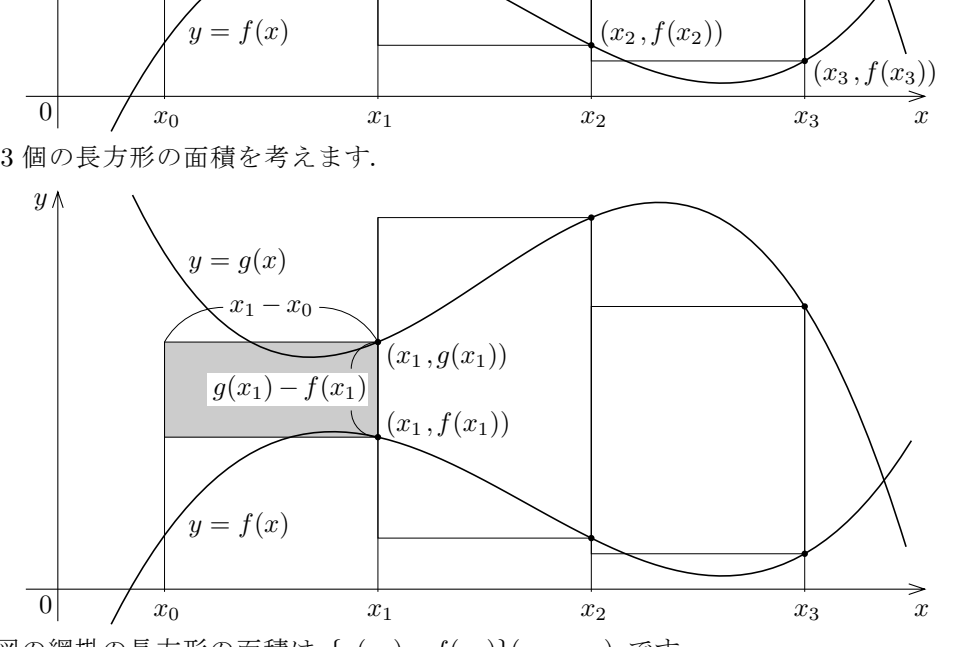
§8.1 平面図形の面積

実数 a と b について $a \leq b$ とし
 ます。また、関数 f と g とは a から
 b まで積分可能であり、区間 $[a, b]$ の各
 実数 x について $f(x) \leq g(x)$ とします。
 xy 座標平面において、連立不等式

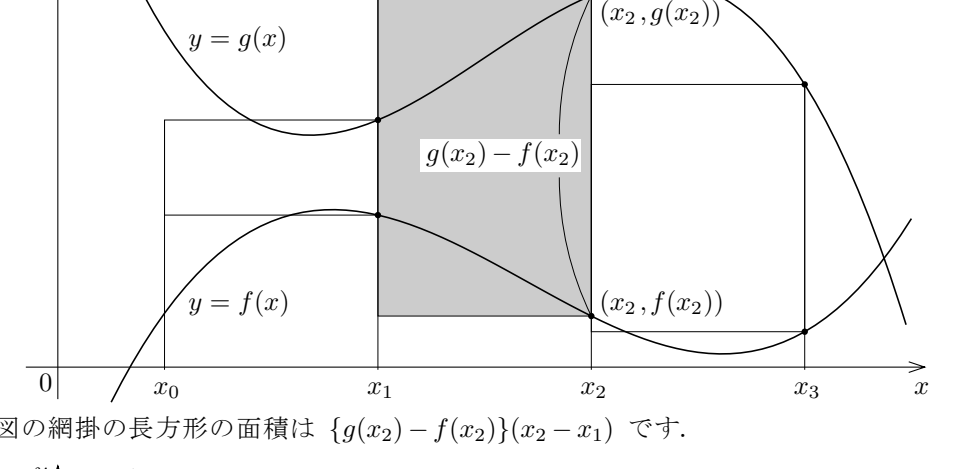
$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域 D の面積を考えます。

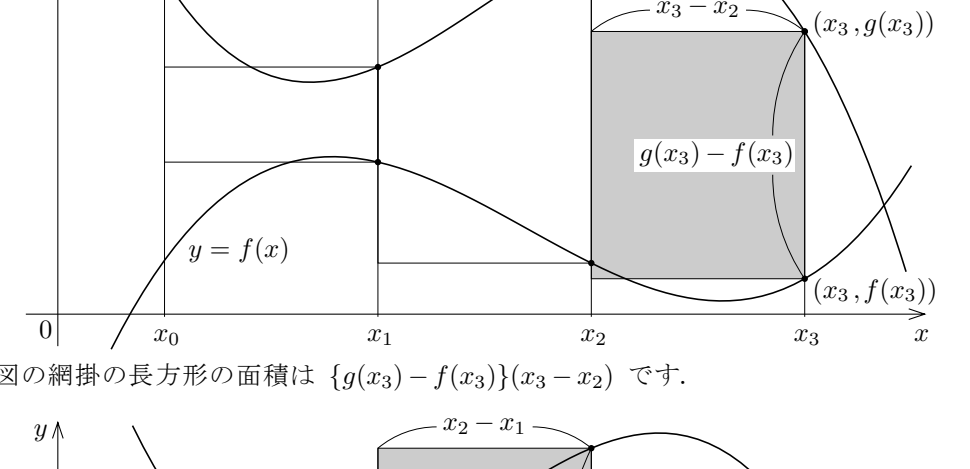
$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = b$ となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3 をとり、次の状況を考え
 ます。



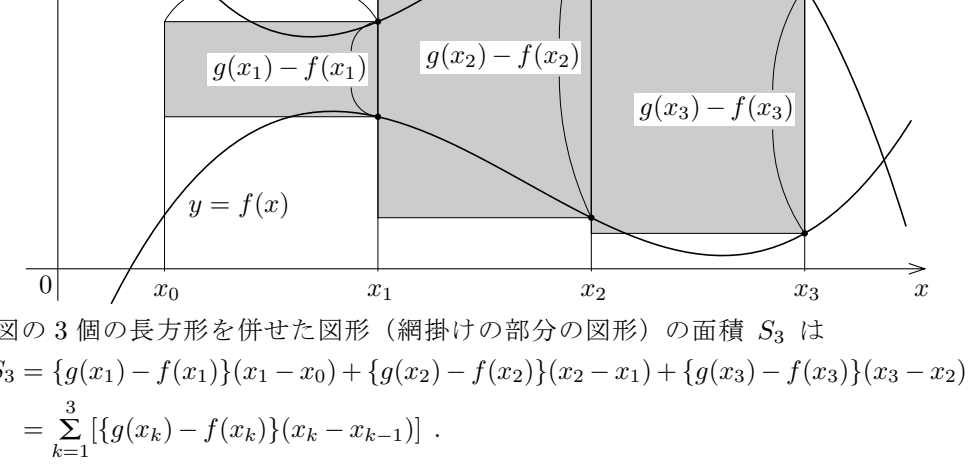
3個の長方形の面積を考えます。



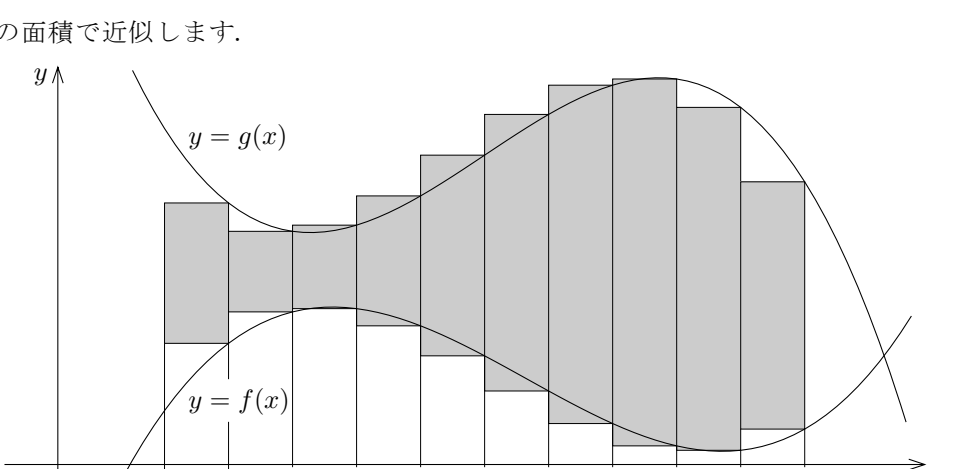
上図の網掛けの長方形の面積は $\{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0)$ です。



上図の網掛けの長方形の面積は $\{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1)$ です。

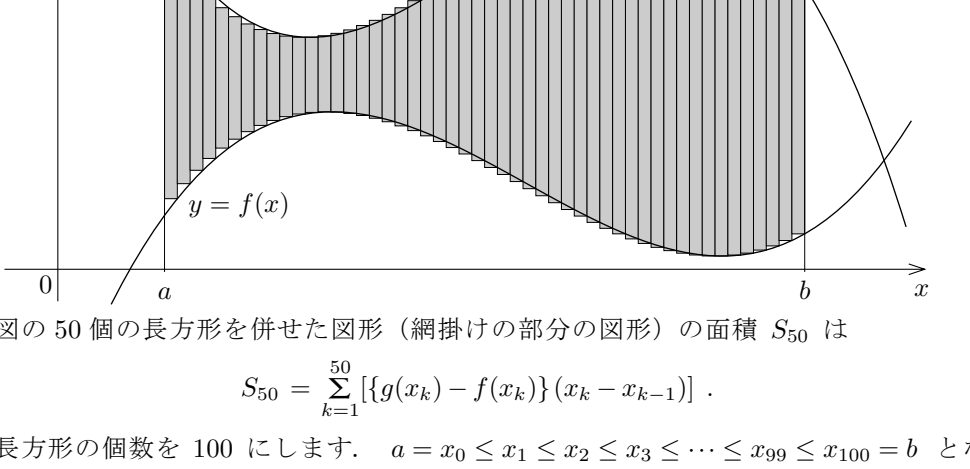


上図の網掛けの長方形の面積は $\{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$ です。



上図の3個の長方形を併せた図形(網掛けの部分の図形)の面積 S_3 は
 $S_3 = \{g(x_1) - f(x_1)\}(x_1 - x_0) + \{g(x_2) - f(x_2)\}(x_2 - x_1) + \{g(x_3) - f(x_3)\}(x_3 - x_2)$
 $= \sum_{k=1}^3 \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$.

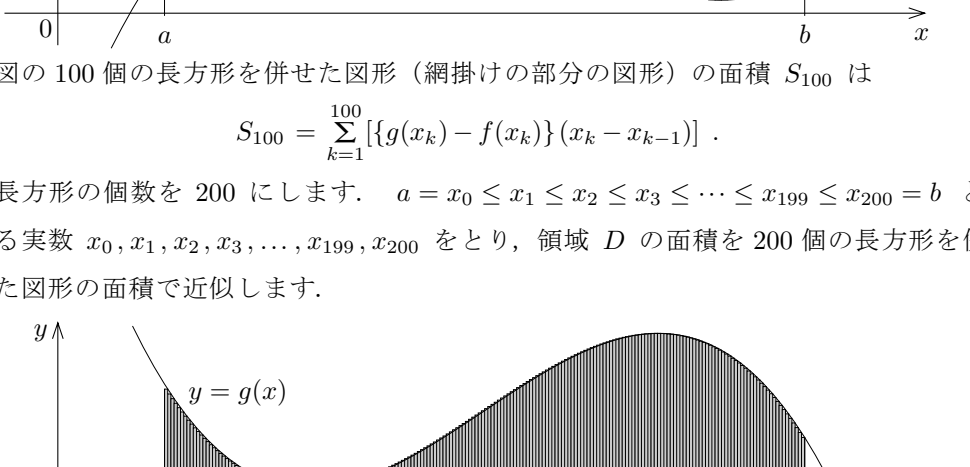
長方形の個数を10にします。 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_9 \leq x_{10} = b$ となる
 実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_9, x_{10}$ をとり、領域 D の面積を10個の長方形を併せた図
 形の面積で近似します。



上図の10個の長方形を併せた図形(網掛けの部分の図形)の面積 S_{10} は

$$S_{10} = \sum_{k=1}^{10} \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

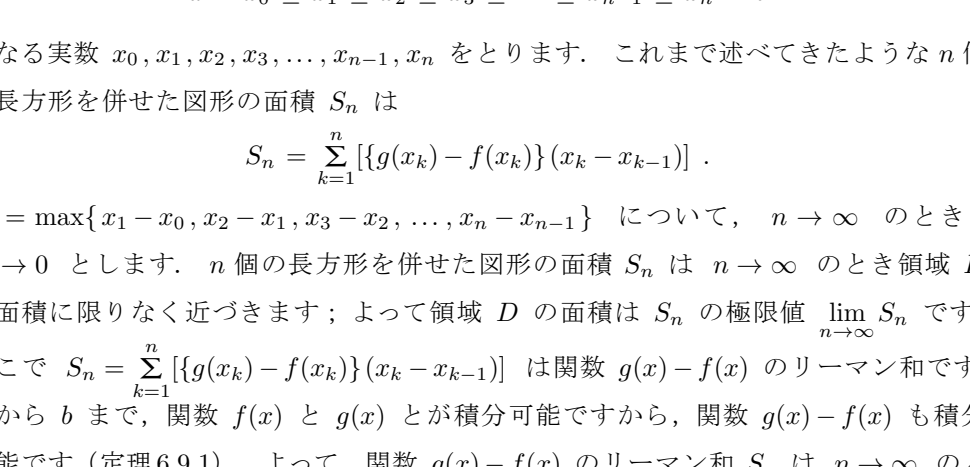
長方形の個数を50にします。 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{49} \leq x_{50} = b$ となる
 実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{49}, x_{50}$ をとり、領域 D の面積を50個の長方形を併せた図
 形の面積で近似します。



上図の50個の長方形を併せた図形(網掛けの部分の図形)の面積 S_{50} は

$$S_{50} = \sum_{k=1}^{50} \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

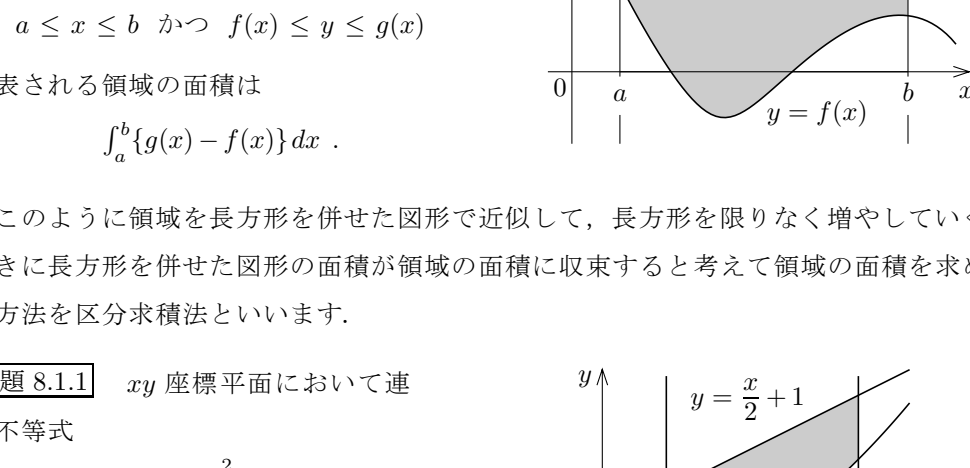
長方形の個数を100にします。 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{99} \leq x_{100} = b$ となる
 実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{99}, x_{100}$ をとり、領域 D の面積を100個の長方形を併せた
 図形の面積で近似します。



上図の100個の長方形を併せた図形(網掛けの部分の図形)の面積 S_{100} は

$$S_{100} = \sum_{k=1}^{100} \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

長方形の個数を200にします。 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{199} \leq x_{200} = b$ と
 なる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{199}, x_{200}$ をとり、領域 D の面積を200個の長方形を併
 せた図形の面積で近似します。



上図の200個の長方形を併せた図形(網掛けの部分の図形)の面積 S_{200} は

$$S_{200} = \sum_{k=1}^{200} \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

正の各自然数 n に対して、
 $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとり、これまで述べてきたような n 個
 の長方形を併せた図形の面積 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$$

$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ について、 $n \rightarrow \infty$ のとき
 $\delta_n \rightarrow 0$ とします。 n 個の長方形を併せた図形の面積 S_n は $n \rightarrow \infty$ のとき領域 D
 の面積に限りなく近づきます；よって領域 D の面積は S_n の極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ です。
 ここで $S_n = \sum_{k=1}^n \{g(x_k) - f(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$ は関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和です。
 a から b まで、関数 $f(x)$ と $g(x)$ とが積分可能ですから、関数 $g(x) - f(x)$ も積分
 可能です(定理6.9.1)。よって、関数 $g(x) - f(x)$ のリーマン和 S_n は $n \rightarrow \infty$ の
 とき定積分 $\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$ に収束します：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$$

故に、領域 D の面積は定積分 $\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$ です。

このようにして次の定理が成り立ちます。

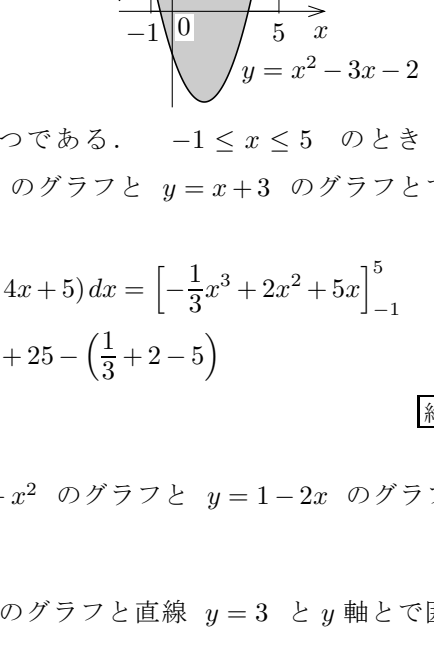
定理8.1 実数 a と b について $a \leq b$

とする。また、関数 f と g とは a から
 b まで積分可能であり、区間 $[a, b]$ の各実
 数 x について $f(x) \leq g(x)$ とする。 xy
 座標平面において連立不等式

$$a \leq x \leq b \text{ かつ } f(x) \leq y \leq g(x)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(x) - f(x)\} dx$$



このように領域を長方形を併せた図形で近似して、長方形を限りなく増やしていく
 ときに長方形を併せた図形の面積が領域の面積に収束すると考えて領域の面積を求め
 る方法を区別積分法といいます。

問題8.1.1 xy 座標平面において連

立不等式

$$1 \leq x \leq 4 \text{ かつ } \frac{x^2}{8} \leq y \leq \frac{x}{2} + 1$$

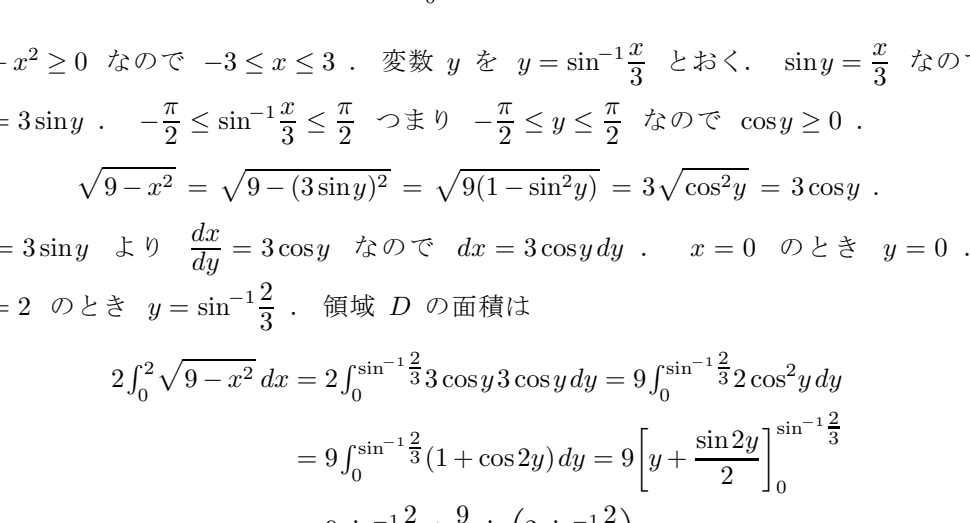
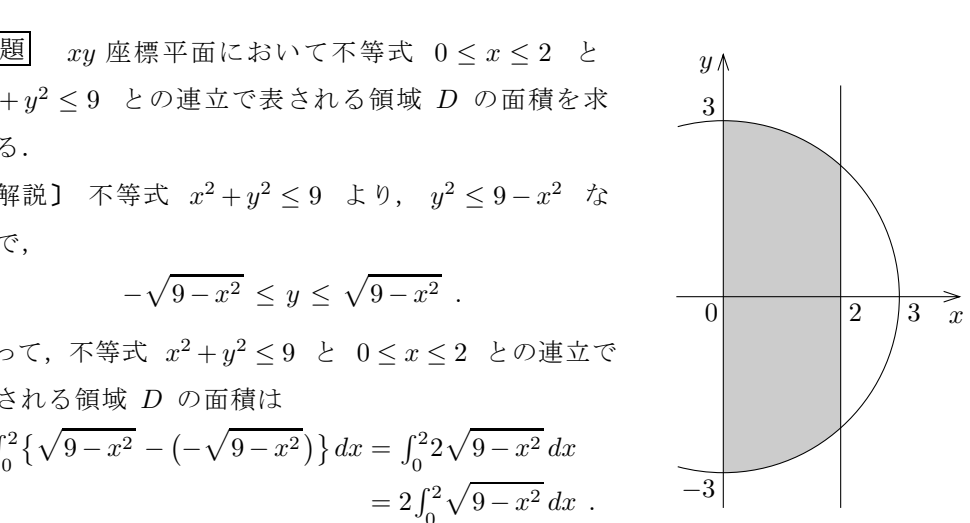
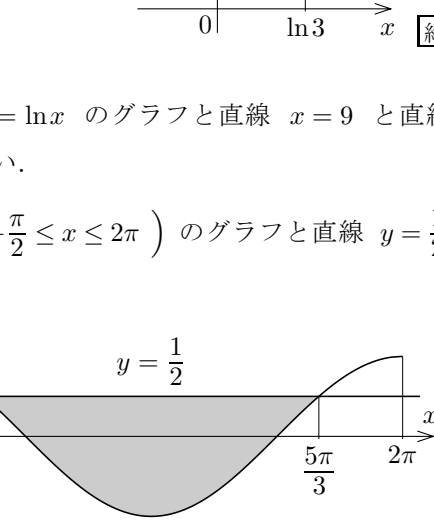
で表される領域 D の面積を求め

ます。

(1) $1 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 = 4$
 である実数 x_0, x_1, x_2, x_3 及び
 $x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3$
 である実数 ξ_1, ξ_2, ξ_3 に対して、
 右図の網掛けされた3個の長方形
 を併せた領域の面積 S_3 を表す式
 を記しなさい。

(2) 変数 n を正の自然数
 とします。 $1 = x_0 \leq \xi_1 \leq$
 $x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots$
 $\leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 4$ であ
 る実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots,$
 x_{n-1}, x_n 及び実数 $\xi_1, \xi_2,$
 ξ_3, \dots, ξ_n に対して、右図の
 ような網掛けされた n 個の
 長方形を併せた領域の面積
 S_n を表す式を記しなさい。
 またこの式を何というか記
 しなさい。

(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とし
 ます；つまり $n \rightarrow \infty$ のとき $x_0,$
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$
 の区間は、
 総て0に限りなく近づくように。
 $n \rightarrow \infty$ のとき S_n は右図のように
 領域 D の面積に限りなく近づきま
 す；つまり S_n の極限値 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$
 が領域 D の面積になります。この
 ことを用いて、定積分によって領域
 D の面積を求めなさい。



例題 xy 座標平面において関数 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフと
 で囲まれる領域の面積を求めよ。

【解説】 まず、 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと
 $y = x + 3$ のグラフとの共有点の x 座標を求め
 る。 $x^2 - 3x - 2 = x + 3$ とすると、

$$\begin{aligned} x^2 - 4x - 5 &= 0, \\ (x+1)(x-5) &= 0, \\ x &= -1, 5. \end{aligned}$$

$y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ の
 グラフとの共有点の x 座標は -1 と 5 の2つである。 $-1 \leq x \leq 5$ のとき
 $x^2 - 3x - 2 \leq x + 3$. 従って、 $y = x^2 - 3x - 2$ のグラフと $y = x + 3$ のグラフとで
 囲まれる領域の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^5 \{(x+3) - (x^2 - 3x - 2)\} dx &= \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right]_{-1}^5 \\ &= -\frac{125}{3} + 50 + 25 - \left(\frac{1}{3} + 2 - 5 \right) \\ &= 36. \end{aligned}$$

【終】

問題8.1.2 xy 座標平面において関数 $y = 9 - x^2$ のグラフと $y = 1 - 2x$ のグラフ
 とで囲まれる領域の面積を求めなさい。

例題 xy 座標平面において指数関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と y 軸とで
 囲まれる領域 D の面積を求めよ。

【解説】 まず関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = 3$ と
 の共有点の x 座標を求めよ。 $y = e^x$ かつ $y = 3$ とす
 ると、 $e^x = 3$ なので $x = \ln 3$. 関数 $y = e^x$ のグラ
 フと直線 $y = 3$ との共有点の x 座標は $\ln 3$ である。
 D の点の x 座標の範囲は $0 \leq x \leq \ln 3$ であり、このと
 き $e^x \leq e^{\ln 3} = 3$. 領域 D の面積は

$$\int_0^{\ln 3} (3 - e^x) dx = [3x - e^x]_0^{\ln 3} = 3 \ln 3 - e^{\ln 3} - (-1) = 3 \ln 3 - 2$$

【終】

問題8.1.3 xy 座標平面において対数関数 $y = \ln x$ のグラフと直線 $x = 9$ と直線
 $y = 2$ とで囲まれる領域 D の面積を求めなさい。

例題 xy 座標平面において関数 $y = \cos x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$) のグラフと直線 $y = \frac{1}{2}$
 とで囲まれる領域の面積を求めよ。

まず関数 $y = \cos x$
 ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$) の
 グラフと直線 $y = \frac{1}{2}$
 との共有点の x 座標
 を求めよ。 $\cos x = \frac{1}{2}$

かつ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ とすると、 $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ のとき $\cos x \geq \frac{1}{2}$,
 $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$ のとき $\cos x \leq \frac{1}{2}$. 面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} - \cos x \right) dx \\ = \left[\sin x - \frac{x}{2} \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} + \left[\frac{x}{2} - \sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ = \frac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

【終】

問題8.1.4 xy 座標平面において関数 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$) のグラフと直線
 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ とで囲まれる領域の面積を求めなさい。

例題 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 2$ と
 $x^2 + y^2 \leq 9$ との連立で表される領域 D の面積を求
 めよ。

【解説】 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ より、 $y^2 \leq 9 - x^2$ な
 ので、
 $-\sqrt{9 - x^2} \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$.

従って、不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と $0 \leq x \leq 2$ との連立で
 表される領域 D の面積は

$$\int_0^2 \{ \sqrt{9 - x^2} - (-\sqrt{9 - x^2}) \} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{9 - x^2} dx = 2 \int_0^2 \sqrt{9 - x^2} dx$$

$9 - x^2 \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$. 変数 y を $y = \sin^{-1} \frac{x}{3}$ とおく。 $\sin y = \frac{x}{3}$ なの
 で $x = 3 \sin y$. $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}$ つまり $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ なので $\cos y \geq 0$.

$$\sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - (3 \sin y)^2} = \sqrt{9(1 - \sin^2 y)} = 3 \sqrt{\cos^2 y} = 3 \cos y$$

$x = 3 \sin y$ より $\frac{dx}{dy} = 3 \cos y$ なので $dx = 3 \cos y dy$. $x = 0$ のとき $y = 0$.
 $x = 2$ のとき $y = \sin^{-1} \frac{2}{3}$. 領域 D の面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 \sqrt{9 - x^2} dx &= 2 \int_0^{\sin^{-1} \frac{2}{3}} 3 \cos y \cdot 3 \cos y dy = 9 \int_0^{\sin^{-1} \frac{2}{3}} 2 \cos^2 y dy \\ &= 9 \int_0^{\sin^{-1} \frac{2}{3}} (1 + \cos 2y) dy = 9 \left[y + \frac{\sin 2y}{2} \right]_0^{\sin^{-1} \frac{2}{3}} \\ &= 9 \sin^{-1} \frac{2}{3} + \frac{9}{2} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{2}{3} \right)$ を計算する。公式 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ により

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right)$$

まず

$$\sin \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

$a = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ とおく。 $\sin a = \sin \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}$ なので、

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{5}{9}$$

$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ より $\cos a \geq 0$ なので、 $\cos a = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, つまり

$$\cos \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

これらのことより

$$\sin \left(2 \sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = 2 \sin \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) \cos \left(\sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4}{9} \sqrt{5}$$

よって

$$9 \sin^{-1} \frac{2}{3} + \frac{9}{2} \sin \left(2 \sin^{-1} \frac{2}{3} \right) = 9 \sin^{-1} \frac{2}{3} + \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{9} \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 9 \sin^{-1} \frac{2}{3}$$

領域 D の面積は $2\sqrt{5} + 9 \sin^{-1} \frac{2}{3}$ である。

【終】

問題8.1.5 xy 座標平面において不等式 $x^2 + y^2 \leq 25$ と $x \geq 3$ との連立で表され
 る領域 D の面積を求めなさい。