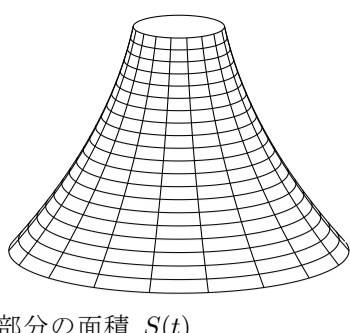
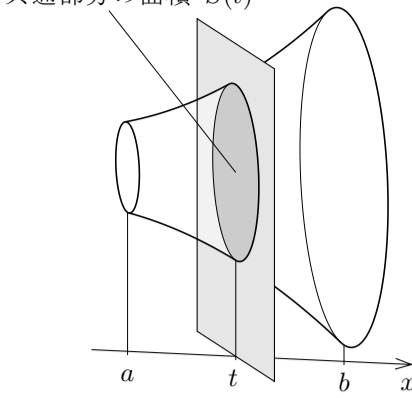


§8.2 立体図形の体積

例として、右図のような立体図形 V (中も詰まっているものとします) の体積を求めることを考えます。話を分かり易くするためにこの立体 V は回転体であるとしします。



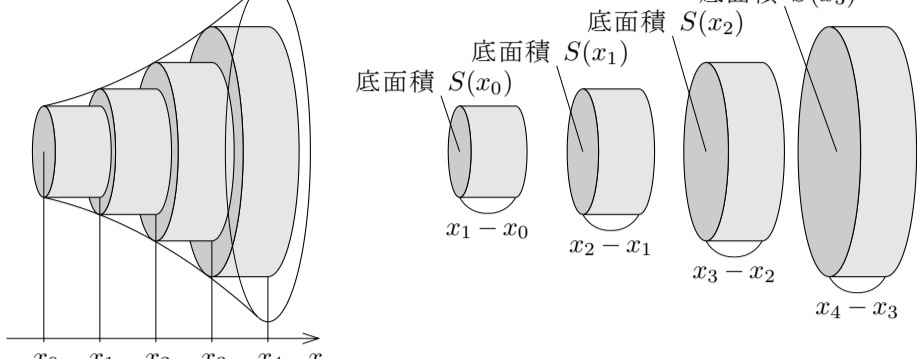
回転体 V に対して、右下の図のように、 V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定します。回転体 V に属す点の x 座標うち、最小値を a と、最大値を b とおきます。更に、区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と立体 V との共通部分である平面図形の面積を $S(t)$ とおきます。この関数 S は a から b まで積分可能であるとしします。



回転体 V を直円柱の形の円盤を重ねた立体で近似します。

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をとります。そして、次の図のように、4枚の円盤を重ねた立体で立体 V を近似します。



このとき、4枚の円盤の体積の合計 W_4 は

$$W_4 = S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3)$$

$$= \sum_{k=1}^4 \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

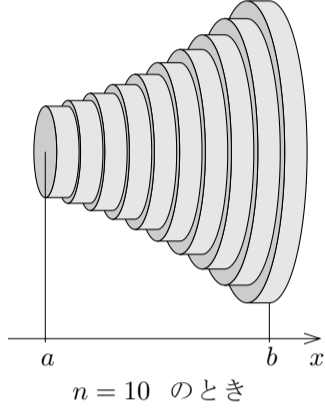
円盤の枚数を n とおきます。正の各自然数 n に対して、

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

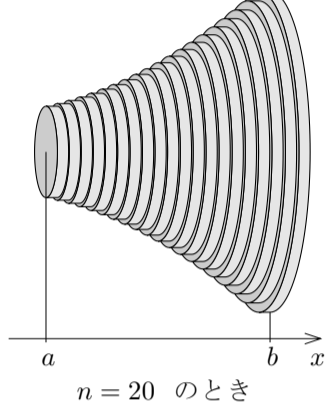
となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ をとります。

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$$

について、 $n \rightarrow \infty$ のとき $\delta_n \rightarrow 0$ とします。下図のように、 n 枚の円盤を重ねた立体で回転体 V を近似します。



$n = 10$ のとき



$n = 20$ のとき

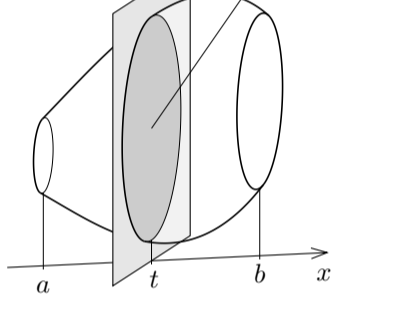
このとき、 V の体積の近似値、つまり n 枚の円盤の体積の合計 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^n \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\}.$$

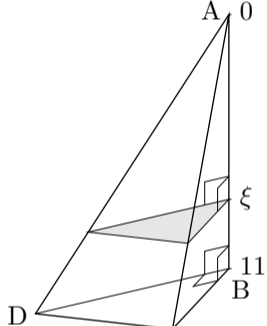
これは関数 S のリーマン和です。円盤の枚数 n を大きくすると近似の精度が高くなります。ですから、 W_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ が V の正確な体積になります。 W_n は関数 S のリーマン和ですから $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = \int_a^b S(x) dx$ 。従って、関数 S の定積分 $\int_a^b S(x) dx$ が回転体 V の体積になります。

回転体に限らず立体について一般的に次の定理が成り立ちます。

定理 8.2 立体 V に対して x 座標軸が設定されているとする。 V に属す点の x 座標のうち、最小値を a と、最大値を b とおく。区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。このとき、立体 V の体積は $\int_a^b S(t) dt$ である。

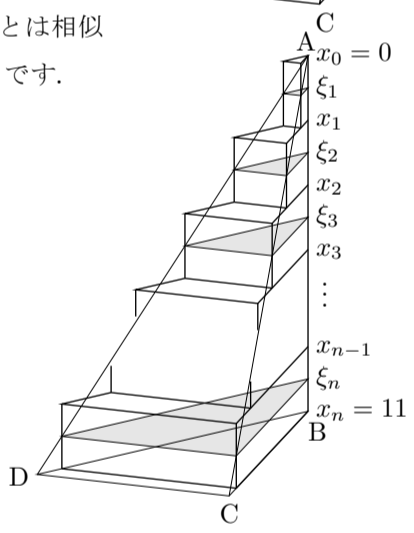


問題 8.2.1 空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 $ABCD$ において、角 ABC, ABD, CBD は直角であるとしします。 $\overline{AB} = 11$, $\overline{BC} = 5$, $\overline{BD} = 8$ としします。この三角錐の体積を考えます。直角三角形 BCD を底面とします。頂点 A を原点とし、頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとります。この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分(右図の網掛けの部分)と直角三角形 BCD とは相似であり、相似比は $\xi : 11$ で、面積の比は $\xi^2 : 11^2$ です。

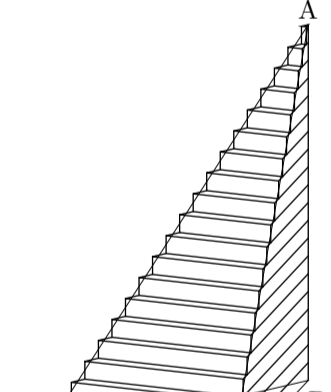


(1) 座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 $ABCD$ との共通部分の面積を求めなさい。

(2) 変数 n を正の自然数とします。 $0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ に対して、右図のように三角錐 $ABCD$ を n 個の直三角柱(側面は底面及び上面と垂直)を併せた立体で近似します：この体積 S_n を表す式を記しなさい。またこの式を何というか記しなさい。

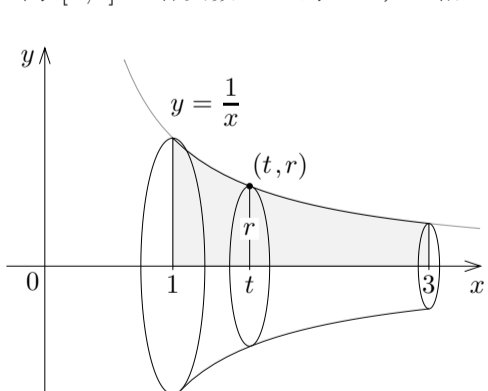


(3) $\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ とします；つまり $n \rightarrow \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に近づくとします。 $n \rightarrow \infty$ のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n は右図のように三角錐 $ABCD$ の体積に限りなく近づきます；つまり S_n の極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が三角錐 $ABCD$ の体積になります。このことを用いて、定積分によって三角錐 $ABCD$ の体積を求めなさい。



例題 xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える。3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める。

【解説】与えられた回転体を V とおく。区間 $[1, 3]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V をとの共通部分は円である；その半径を r とおくと、 xy 座標平面において点 (t, r) は $y = \frac{1}{x}$ のグラフに属するので、 $r = \frac{1}{t}$ ；よって、共通部分の面積 $S(t)$ は



$$S(t) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2}.$$

従って、回転体 V の体積は、

$$\int_1^3 S(t) dt = \int_1^3 \frac{\pi}{t^2} dt = \pi \int_1^3 t^{-2} dt = \pi [-t^{-1}]_1^3 = -\pi \left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\pi \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

終

問題 8.2.2 xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考えます。3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

例題 xy 座標平面において楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を、3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める。

【解説】 xy 座標平面において楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体を V とおく。 $1 - \frac{x^2}{9} = \frac{y^2}{4} \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$ 。区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して、 x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと、 xy 座標平面において点 (t, r) は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に属するので $\frac{t^2}{9} + \frac{r^2}{4} = 1$ 、よって

$$r^2 = 4 \left(1 - \frac{t^2}{9}\right);$$

共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = 4\pi \left(1 - \frac{t^2}{9}\right).$$

故に回転体 V の体積は、

$$\int_{-3}^3 S(t) dt = \int_{-3}^3 4\pi \left(1 - \frac{t^2}{9}\right) dt = 4\pi \left[t - \frac{t^3}{27}\right]_{-3}^3 = 4\pi \left\{3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27}\right)\right\} = 16\pi.$$

終

問題 8.2.3 xy 座標平面において楕円 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を、3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい。

