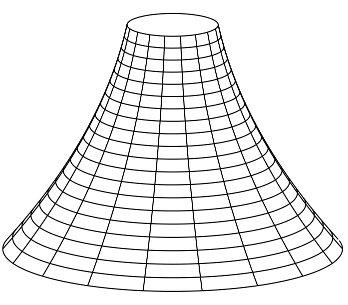
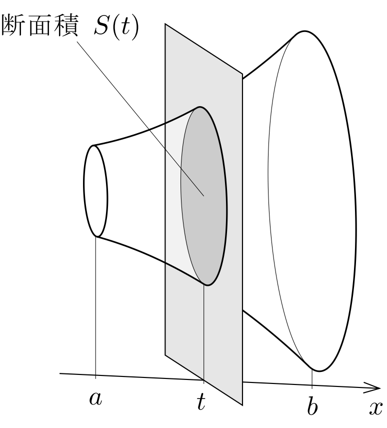
§8.2　立体図形の体積



例として，右図のような立体図形 V （中も詰まっているものとします）の体積を求めることを考えます．話を分かりやすくするためにこの立体 V は回転体であるとします．

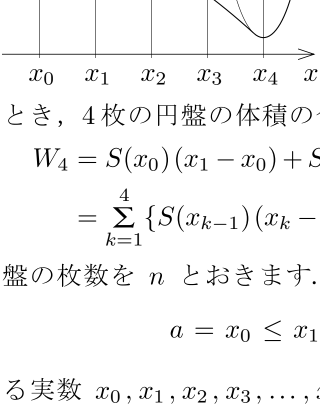
回転体 V に対して，右下の図のように，V の中心軸と平行になるように x 座標軸を設定します．回転体 V に属す点の x 座標うち，最小値を a と，最大値を b とおきます．更に，区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面で立体 V を切断したときの断面の面積を $S(t)$ とおきます．この関数 S は a から b まで積分可能であるとします．

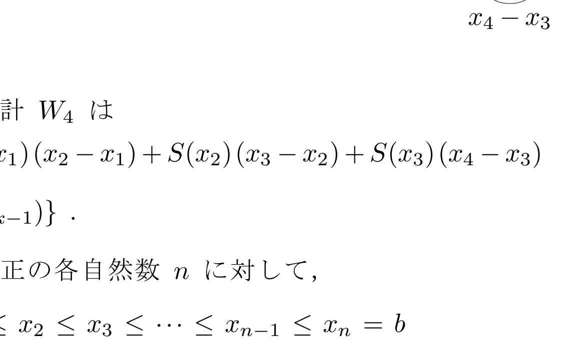


回転体 V を直円柱の形の円盤を重ねた立体で近似します．

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 = b$$

となる実数 x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 をとります．そして，次の図のように，4枚の円盤を重ねた立体で立体 V を近似します．





このとき，4枚の円盤の体積の合計 W_4 は

$$\begin{aligned} W_4 &= S(x_0)(x_1 - x_0) + S(x_1)(x_2 - x_1) + S(x_2)(x_3 - x_2) + S(x_3)(x_4 - x_3) \\ &= \sum_{k=1}^{4} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ . \end{aligned}$$

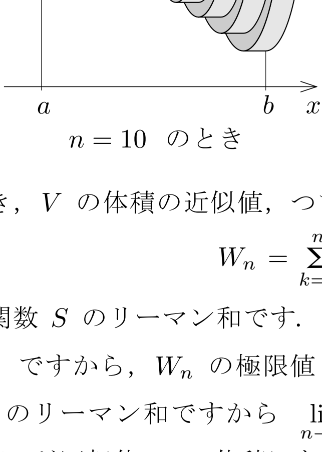
円盤の枚数を n とおきます．正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

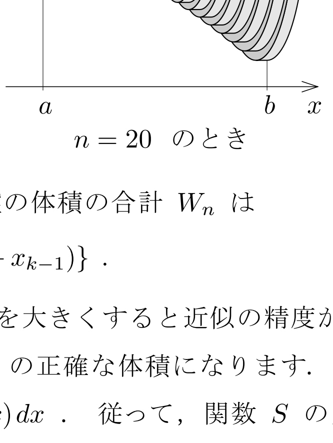
となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとります．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$$

について，$n \to \infty$ のとき $\delta_n \to 0$ とします．下図のように，n 枚の円盤を重ねた立体で回転体 V を近似します．



$n = 10$ のとき



$n = 20$ のとき

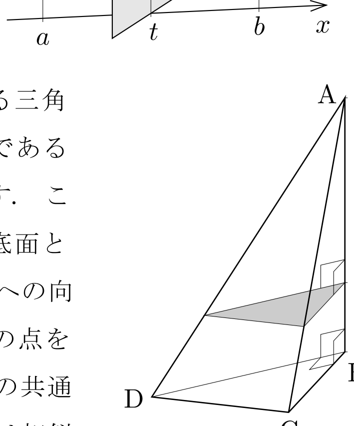
このとき，V の体積の近似値，つまり n 枚の円盤の体積の合計 W_n は

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} \{S(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

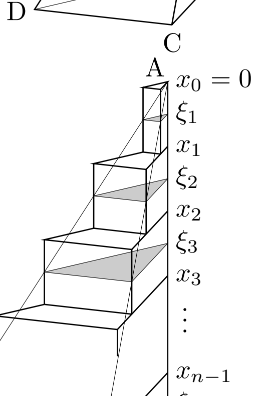
これは関数 S のリーマン和です．円盤の枚数 n を大きくすると近似の精度が高くなります．ですから，W_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} W_n$ が V の正確な体積になります．W_n は関数 S のリーマン和ですから $\lim_{n\to\infty} W_n = \int_a^b S(x)\,dx$ ．従って，関数 S の定積分 $\int_a^b S(x)\,dx$ が回転体 V の体積になります．

回転体に限らず立体について一般的に次の定理が成り立ちます．

定理 8.2　立体 V に対して x 座標軸が設定されているとする．V に属す点の x 座標のうち，最小値を a と，最大値を b とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．

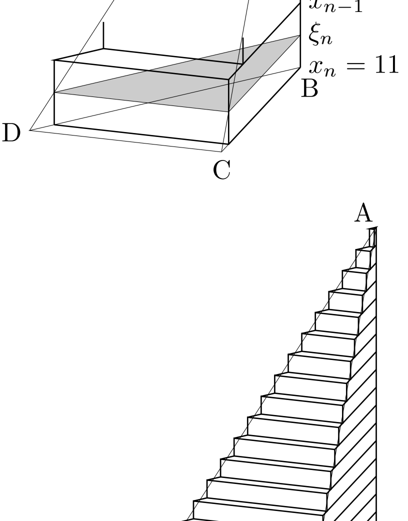


$\boxed{\text{問題 8.2.1}}$　空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする三角錐 ABCD において，角 ABC, ABD, CBD は直角であるとします．$\overline{\mathrm{AB}} = 11$ ，$\overline{\mathrm{BC}} = 5$ ，$\overline{\mathrm{BD}} = 8$ とします．この三角錐の体積を考えます．直角三角形 BCD を底面とします．頂点 A を原点とし，頂点 A から頂点 B への向きに座標軸をとります．この座標軸上で座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分（右図の網掛けの部分）と直角三角形 BCD とは相似であり，相似比は $\xi : 11$ で，面積の比は $\xi^2 : 11^2$ です．

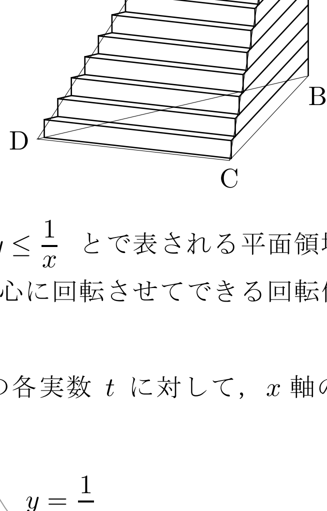


(1)　座標が ξ の点を切片とする座標軸に垂直な平面と三角錐 ABCD との共通部分の面積を求めなさい．

(2)　変数 n を正の自然数とします．$0 = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 \leq \xi_2 \leq x_2 \leq \xi_3 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = 11$ である実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ 及び実数 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ に対して，右図のように三角錐 ABCD を n 個の直三角柱（側面は底面及び上面と垂直）を併せた立体で近似します：この体積 S_n を表す式を記しなさい．またこの式を何というか記しなさい．

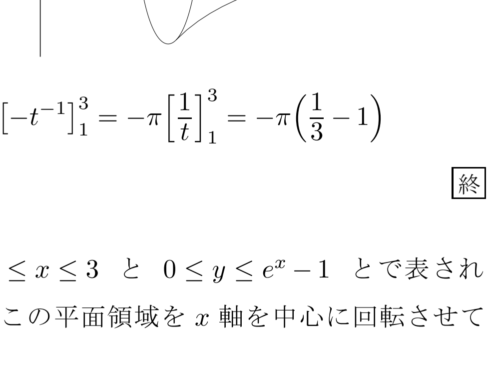


(3)　$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\}$ について $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします；つまり $n \to \infty$ のとき $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ の間隔は総て 0 に近づくとします．$n \to \infty$ のとき薄い三角柱を併せた立体の体積 S_n は右図のように三角錐 ABCD の体積に限りなく近づきます；つまり S_n の極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ が三角錐 ABCD の体積になります．このことを用いて，定積分によって三角錐 ABCD の体積を求めなさい．



$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $1 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq \dfrac{1}{x}$ とで表される平面領域を考える．3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

〔解説〕 与えられた回転体を V とおく．区間 $[1,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面で V を切断してできる断面は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y = \dfrac{1}{x}$ のグラフに属すので，$r = \dfrac{1}{t}$ ；よって，この断面の面積 $S(t)$ は



$$S(t) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{\pi}{t^2} \ .$$

従って，回転体 V の体積は，

$$\begin{aligned} \int_1^3 S(t)\,dt &= \int_1^3 \frac{\pi}{t^2}\,dt = \pi\int_1^3 t^{-2}dt = \pi\left[-t^{-1}\right]_1^3 = -\pi\left[\frac{1}{t}\right]_1^3 = -\pi\left(\frac{1}{3} - 1\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.2.2}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と $0 \leq y \leq e^x - 1$ とで表される平面領域を考えます．3次元空間においてこの平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい．

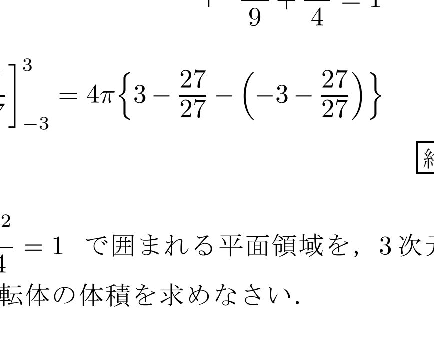
$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を，3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求める．

〔解説〕 xy 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体を V とおく．$1 - \dfrac{x^2}{9} = \dfrac{y^2}{4} \geq 0$ なので $-3 \leq x \leq 3$ ．区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面で V を切断してできる断面は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ に属すので $\dfrac{t^2}{9} + \dfrac{r^2}{4} = 1$ ，よって

$$r^2 = 4\left(1 - \frac{t^2}{9}\right) \ ;$$

従って断面の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = 4\pi\left(1 - \frac{t^2}{9}\right) \ .$$



故に回転体 V の体積は，

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 S(t)\,dt &= \int_{-3}^3 4\pi\left(1 - \frac{t^2}{9}\right)dt = 4\pi\left[t - \frac{t^3}{27}\right]_{-3}^3 = 4\pi\left\{3 - \frac{27}{27} - \left(-3 - \frac{27}{27}\right)\right\} \\ &= 16\pi \ . \end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.2.3}}$　xy 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ で囲まれる平面領域を，3次元空間において x 軸を中心に回転させてできる回転体の体積を求めなさい．