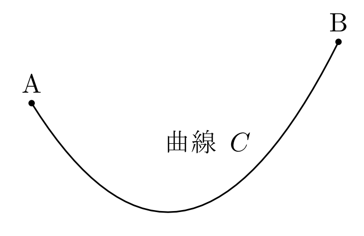
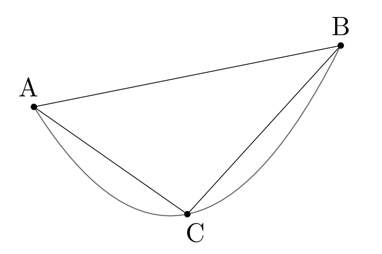
§8.3　関数のグラフの長さ

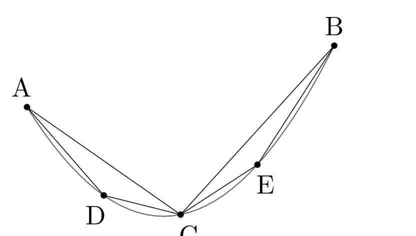
例として，右図のような，放物線の一部を C とおきます． この曲線 C の長さを考えます． 曲線 C の端点の各々を A, B とおきます． グラフに属す点のうち，点 A と点 B との中間にある点 C をとります． このとき，



$$\text{線分 AB の長さ} < \text{折れ線 ACB の長さ} < \text{曲線 } C \text{ の長さ} .$$



直線 AB と折れ線 ACB



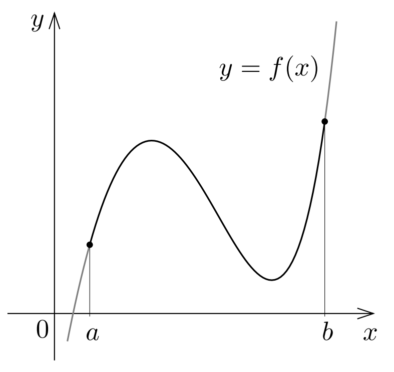
折れ線 ACB と折れ線 ADCEB

グラフに属す点のうち，点 A と点 C との中間にある点 D と，点 C と点 B との中間にある点 E とをとります． このとき，

$$\text{折れ線 ACB の長さ} < \text{折れ線 ADCEB の長さ} < \text{曲線 } C \text{ の長さ} .$$

このように，節点（折れる点）がより多い折れ線で曲線を近似すると，折れ線の長さは曲線の長さに近づいていくようです．

このような考えに基づいて次の定理が導かれます．



定理 8.3　実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a,b]$ において連続であるとする． xy 座標平面において不等式 $a \leq x \leq b$ と方程式 $y = f(x)$ との連立で表される曲線の長さは $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$ ．

この定理の証明は後にします．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 1$ と方程式 $y = 2\sqrt{x}^3$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．

〔解説〕 区間 $[0,1]$ を定義域とする関数 f を $f(x) = 2\sqrt{x}^3$ とおく． このとき，

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(2\sqrt{x}^3\right) = 2\frac{d}{dx}x^{\frac{3}{2}} = 2\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{x} \ ,$$

$$1 + f'(x)^2 = 1 + \left(3\sqrt{x}\right)^2 = 1 + 9x \ ,$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x}\, dx \ .$$

$t = 1 + 9x$ とおく． $\dfrac{dt}{dx} = 9$ より $dx = \dfrac{1}{9}dt$ ． $x = 0$ のとき $t = 1$ ， $x = 1$ のとき $t = 10$ ．

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+9x}\, dx &= \int_1^{10} \sqrt{t}\,\frac{1}{9}\,dt = \frac{1}{9}\int_1^{10} t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{9}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{10} = \frac{2}{27}\left(\sqrt{10}^3 - \sqrt{1}^3\right)\\ &= \frac{2}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) \ .\end{aligned}$$

曲線 C の長さは $\dfrac{2}{29}\left(10\sqrt{10} - 1\right)$ である．

$\boxed{\text{問題 8.3.1}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 8$ と方程式 $y = \dfrac{\sqrt{x^3}}{3}$ との連立で表される曲線 C の長さを求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{12 - x^2}$ との連立で表される曲線 C の長さを求める．

〔解説〕 $0 \leq x \leq 3$ の範囲で，変数 x の関数 $y = \sqrt{12 - x^2}$ について，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{12 - x^2} = \frac{d}{dx}(12 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(12 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}} \ ,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{12 - x^2}}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{12 - x^2} = \frac{12 - x^2 + x^2}{12 - x^2} = \frac{12}{12 - x^2} \ ,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{12 - x^2}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}} \ ,$$

曲線 C の長さは

$$\begin{aligned}\int_0^3 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx &= \int_0^3 \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{12 - x^2}}\, dx = \sqrt{12}\left[\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{12}}\right]_0^3\\ &= \sqrt{12}\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin^{-1}0\right\} = \sqrt{12} \cdot \frac{\pi}{3}\\ &= \frac{\sqrt{12}\,\pi}{3} \ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.3.2}}$　xy 座標平面において不等式 $0 \leq x \leq 3$ と方程式 $y = \sqrt{36 - x^2}$ とで表される曲線 C の長さを求めなさい．

定理 8.3 を証明します． 実数 a と b とについて $a \leq b$ で，関数 f の導関数 f' は区間 $[a,b]$ において連続であるとします．

正の各自然数 n に対して，

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となる実数 $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ をとります．

$$\delta_n = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_n - x_{n-1}\} \ .$$

について， $n \to \infty$ のとき $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ とします．

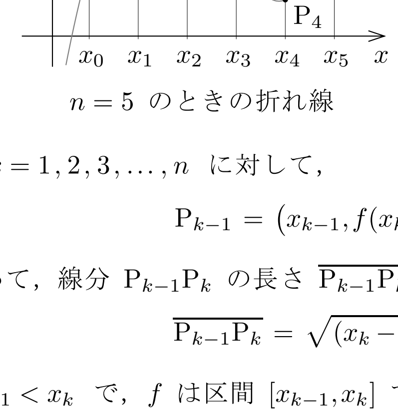
$y = f(x)$ のグラフの点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を次のように定めます：

$$\mathrm{P}_0 = \left(x_0, f(x_0)\right) \ , \quad \mathrm{P}_1 = \left(x_1, f(x_1)\right) \ , \quad \mathrm{P}_2 = \left(x_2, f(x_2)\right) \ , \quad \mathrm{P}_3 = \left(x_3, f(x_3)\right) \ , \quad \cdots \ ,$$
$$\mathrm{P}_{n-1} = \left(x_{n-1}, f(x_{n-1})\right) \ , \quad \mathrm{P}_n = \left(x_n, f(x_n)\right) \ .$$

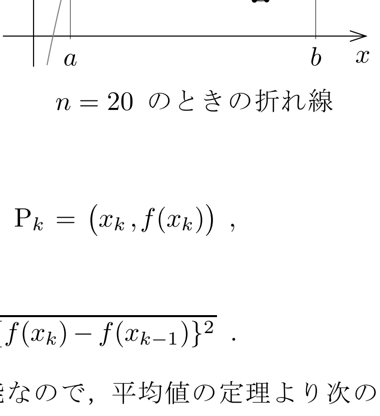
点 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}, \mathrm{P}_n$ を順に結ぶ折れ線の長さを L_n とおきます：

$$L_n = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} \ .$$

例えば次のような図になります．



$n = 5$ のときの折れ線



$n = 20$ のときの折れ線

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して，

$$\mathrm{P}_{k-1} = \left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right) \ , \qquad \mathrm{P}_k = \left(x_k, f(x_k)\right) \ ,$$

よって，線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さ $\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$ は

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2} \ .$$

$x_{k-1} < x_k$ で， f は区間 $[x_{k-1}, x_k]$ で微分可能なので，平均値の定理より次のような実数 ξ_k があります：

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \ , \qquad x_{k-1} < \xi_k < x_k \ .$$

このことから，

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2}\\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\}^2}\\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \{f'(\xi_k)\}^2(x_k - x_{k-1})^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2\{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}\\ &= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2}\sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} \ ,\end{aligned}$$

$x_{k-1} \leq x_k$ より $x_k - x_{k-1} \geq 0$ なので $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2} = x_k - x_{k-1}$ ，よって

$$\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2} \ .$$

従って，折れ線の長さ L_n は

$$\begin{aligned}L_n &= \sum_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k} = \sum_{k=1}^{n}\left\{(x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}\right\}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{1 + \{f'(\xi_k)\}^2}\,(x_k - x_{k-1})\right\} \ .\end{aligned}$$

仮に関数 F を $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ と定めます． このとき，

$$L_n = \sum_{k=1}^{n}\{F(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\} \ .$$

$k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ なので，この等式の右辺は関数 F のリーマン和です．

折れ線の長さ L_n の極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} L_n$ があるならば，それが方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さになります． 関数 f の導関数 $f'(x)$ は連続なので，関数 $F(x) = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ も連続です． 従って関数 F は a から b まで積分可能です． L_n は関数 F のリーマン和なので， L_n の極限値は F の定積分です：

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx \ .$$

故に， 方程式 $y = f(x)$ と不等式 $a \leq x \leq b$ とで表される曲線の長さは $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx$ です．

こうして定理 8.3 が証明されました．