第８章の補遺１　平面図形の面積

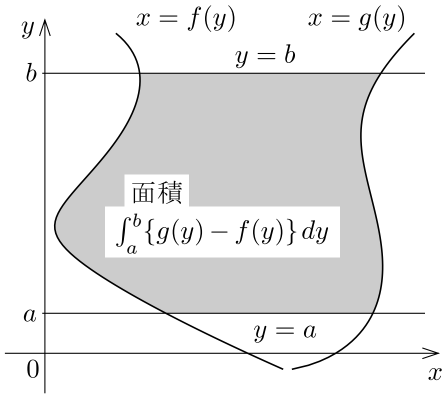
xy 座標平面における領域の面積を計算するために y で積分することがあります.

定理 8. 補遺１　実数 a と b とについて $a \leq b$ とする．また，関数 f と g とは a から b まで積分可能で，区間 $[a,b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする．xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y)-f(y)\}\,dy\ .$$

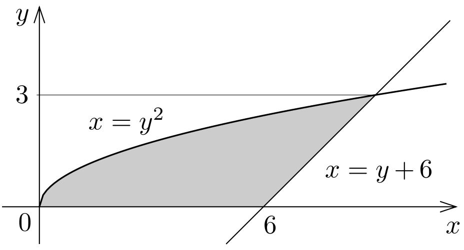


例題　xy 座標平面において関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=x-6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

$$y=\sqrt{x} \iff x=y^2 \text{ かつ } y\geq 0\ ,$$

$$y=x-6 \iff x=y+6\ .$$

$x=y^2$ かつ $y\geq 0$ かつ $x=y+6$ とすると，$y^2=y+6$，$y=3,-2$；$y\geq 0$ なので $y=3$．$0\leq y\leq 3$ のとき $y+6\geq y^2$．



領域の面積は

$$\int_0^3 (y+6-y^2)\,dy = \left[\frac{1}{2}y^2+6y-\frac{1}{3}y^3\right]_0^3 = \frac{27}{2}\ .$$

この面積を x について積分して求める計算は次のようになる.

$$\begin{aligned}\int_0^6 \sqrt{x}\,dx + \int_6^9 \left\{\sqrt{x}-(x-6)\right\}dx &= \int_0^9 \sqrt{x}\,dx - \int_6^9 (x-6)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^9 - \left[\frac{1}{2}x^2-6x\right]_6^9 \\ &= \frac{27}{2}\ .\end{aligned}$$

終

問題 8.補遺1.1　xy 座標平面において関数 $y=-\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y=\dfrac{x}{2}-4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

例題　xy 座標平面において関数 $y=\ln x$（$x>0$）のグラフと直線 $y=1$ と直線 $y=2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

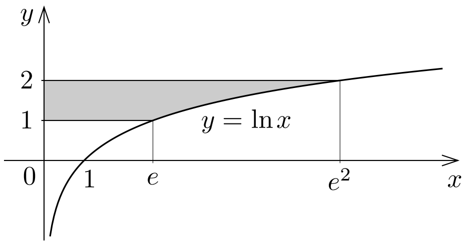
$$y\geq \ln x \iff 0<x\leq e^y\ .$$

領域を表す連立不等式は

$$1\leq y\leq 2 \text{ かつ } 0\leq x\leq e^y\ .$$

領域の面積は

$$\int_1^2 e^y\,dy = \left[e^y\right]_1^2 = e^2-e\ .$$



この面積を x について積分して求める計算は次のようになる.

$$\int_0^e (2-1)\,dx + \int_e^{e^2}\left(2-\ln x\right) = \left[x\right]_0^e + \left[3x-x\ln x\right]_e^{e^2} = e^2-e\ .$$

終

問題 8.補遺1.2　xy 座標平面において関数 $y=e^x$ のグラフと直線 $y=e$ と直線 $y=e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

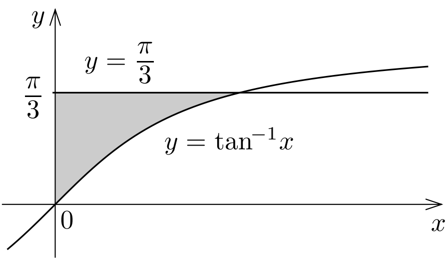
例題　xy 座標平面において $y=\tan^{-1}x$ のグラフと方程式 $y=\dfrac{\pi}{3}$ で表される直線と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

各実数 x,y について，$-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$y\geq \tan^{-1}x \iff x\leq \tan y\ .$$

領域を表す連立不等式は

$$0\leq y\leq \frac{\pi}{3} \text{ かつ } 0\leq x\leq \tan y\ .$$



従って領域の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan y\,dy = \left[-\ln|\cos y|\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln\frac{1}{2}-(-\ln 1) = \ln 2\ .$$

終

問題 8.補遺1.3　xy 座標平面において関数 $y=\sin^{-1}x$（$-1\leq x\leq 1$）のグラフと直線 $x=1$ と x 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.