

第8章の補遺1 平面図形の面積

xy 座標平面における領域の面積を計算するために y で積分することがあります。

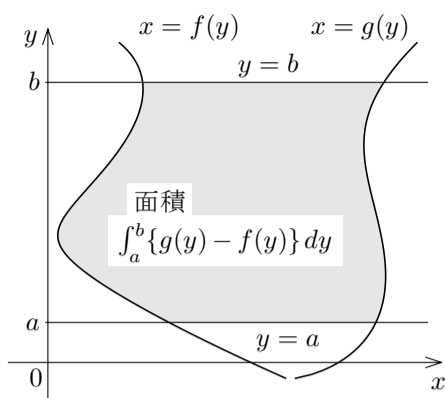
定理 8.補遺1 実数 a と b について $a \leq b$ とする. また, 関数 f と g とは a から b まで積分可能で, 区間 $[a, b]$ の各実数 y について $f(y) \leq g(y)$ とする.

xy 座標平面において連立不等式

$$a \leq y \leq b \text{ かつ } f(y) \leq x \leq g(y)$$

で表される領域の面積は

$$\int_a^b \{g(y) - f(y)\} dy .$$



例題 xy 座標平面において関数 $y = \sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = x - 6$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

$$y = \sqrt{x} \iff x = y^2 \text{ かつ } y \geq 0 ,$$

$$y = x - 6 \iff x = y + 6 .$$

$x = y^2$ かつ $y \geq 0$ かつ $x = y + 6$ とすると, $y^2 = y + 6$, $y = 3, -2$; $y \geq 0$ なので $y = 3$. $0 \leq y \leq 3$ のとき $y + 6 \geq y^2$.

領域の面積は

$$\int_0^3 (y + 6 - y^2) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^3 = \frac{27}{2} .$$

この面積を x について積分して求める計算は次のようになる.

$$\begin{aligned} \int_0^6 \sqrt{x} dx + \int_6^9 \{ \sqrt{x} - (x - 6) \} dx &= \int_0^9 \sqrt{x} dx - \int_6^9 (x - 6) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 - \left[\frac{1}{2}x^2 - 6x \right]_6^9 \\ &= \frac{27}{2} . \end{aligned}$$

終

問題 8.補遺1.1 xy 座標平面において関数 $y = -\sqrt{x}$ のグラフと関数 $y = \frac{x}{2} - 4$ のグラフと x 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

例題 xy 座標平面において関数 $y = \ln x$ ($x > 0$) のグラフと直線 $y = 1$ と直線 $y = 2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

$$y \geq \ln x \iff 0 < x \leq e^y .$$

領域を表す連立不等式は

$$1 \leq y \leq 2 \text{ かつ } 0 < x \leq e^y .$$

領域の面積は

$$\int_1^2 e^y dy = [e^y]_1^2 = e^2 - e .$$

この面積を x について積分して求める計算は次のようになる.

$$\int_0^e (2 - 1) dx + \int_e^{e^2} (2 - \ln x) = [x]_0^e + [3x - x \ln x]_e^{e^2} = e^2 - e .$$

終

問題 8.補遺1.2 xy 座標平面において関数 $y = e^x$ のグラフと直線 $y = e$ と直線 $y = e^2$ と y 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

例題 xy 座標平面において $y = \tan^{-1} x$ のグラフと方程式 $y = \frac{\pi}{3}$ で表される直線と y 軸とで囲まれる領域の面積を求める.

各実数 x, y について, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$y \geq \tan^{-1} x \iff x \leq \tan y .$$

領域を表す連立不等式は

$$0 \leq y \leq \frac{\pi}{3} \text{ かつ } 0 \leq x \leq \tan y .$$

従って領域の面積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan y dy = [-\ln |\cos y|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -\ln \frac{1}{2} - (-\ln 1) = \ln 2 .$$

終

問題 8.補遺1.3 xy 座標平面において関数 $y = \sin^{-1} x$ ($-1 \leq x \leq 1$) のグラフと直線 $x = 1$ と x 軸とで囲まれる領域の面積を求めなさい.

