第8章の補遺3　座標空間における立体領域の体積

3次元座標空間における立体領域の体積を求めるために定理8.2を改変すると次のようになります．

定理　xyz 座標空間において，立体領域 V に属す点の x 座標のうち，最小値を a と，最大値を b とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸に垂直な平面 $x=t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．

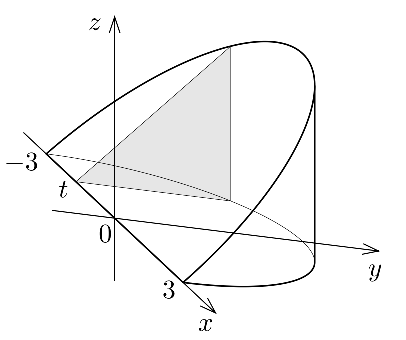
この定理では xyz 座標空間における立体と x 軸に垂直な平面との共通部分を考えましたが，y 軸に垂直な平面との共通部分を考えることもできます．

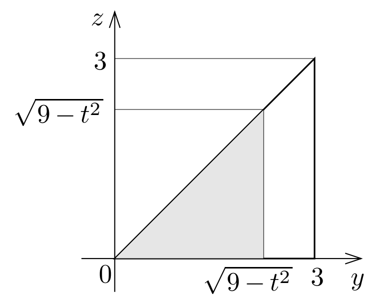
定理　xyz 座標空間において，立体領域 V に属す点の y 座標のうち，最小値を a と，最大値を b とおく．区間 $[a,b]$ の各実数 t に対して，x 軸に垂直な平面 $y=t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする．このとき，立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t)\,dt$ である．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において不等式　$x^2+y^2\leq 9$　で表される円柱体と不等式 $0\leq z\leq y$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求める．

〔解説〕　不等式　$x^2+y^2\leq 9$　より，$x^2\leq 9-y^2\leq 9$　なので　$-3\leq x\leq 3$．区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して平面　$x=t$ と立体領域 V との共通部分を考える．不等式　$x^2+y^2\leq 9$　と方程式　$x=t$　とより，$t^2+y^2\leq 9$，$y^2\leq 9-t^2$，$y\geq 0$　なので $0\leq y\leq\sqrt{9-t^2}$．更に不等式　$0\leq z\leq y$ より　$0\leq z\leq y\leq\sqrt{9-t^2}$；この不等式は，$yz$ 座標平面において2辺の長さが　$\sqrt{9-t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{9-t^2}\sqrt{9-t^2}=\frac{9-t^2}{2}.$$





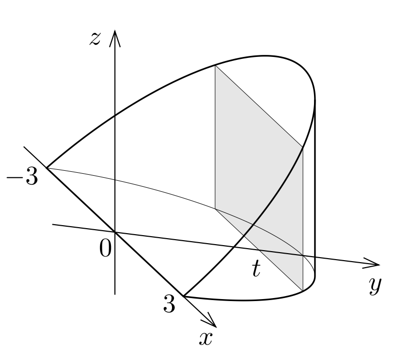
立体領域 V の体積は，

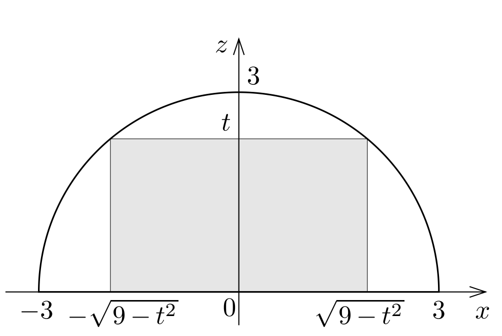
$$\int_{-3}^{3}S(t)\,dt=\int_{-3}^{3}\frac{9-t^2}{2}\,dt=\left[\frac{9}{2}t-\frac{1}{6}t^3\right]_{-3}^{3}=27-9=18.$$

y 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えてもよい．

不等式　$x^2+y^2\leq 9$　より　$y^2\leq 9-x^2\leq 9$ なので　$-3\leq y\leq 3$，更に　$y\geq 0$　なので $0\leq y\leq 3$．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して平面　$y=t$　と立体領域 V との共通部分を考える．不等式　$x^2+y^2\leq 9$　と方程式 $y=t$　とより，$x^2+t^2\leq 9$，$x^2\leq 9-t^2$，$-\sqrt{9-t^2}\leq x\leq\sqrt{9-t^2}$．また，不等式 $0\leq z\leq y$　と方程式 $y=t$ とより $0\leq z\leq t$．これらの不等式は，yz 座標平面において x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9-x^2}$ で z 軸方向の辺の長さが t である長方形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=2\sqrt{9-t^2}\,t=2t\sqrt{9-t^2}.$$





立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t)\,dt=\int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt.$$

$u=9-t^2$　とおく．$\dfrac{du}{dt}=-2t$　なので　$2t\,dt=-du$．$t=0$　のとき　$u=9$，$t=3$ のとき　$u=0$．よって，

$$\int_0^3 2t\sqrt{9-t^2}\,dt=\int_9^0 u^{\frac{1}{2}}(-du)=-\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_9^0=18.$$

故に立体領域 V の体積は 18 である．　$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.1}}$　xyz 座標空間において不等式 $x^2+y^2\leq 3$ で表される円柱体と不等式　$0\leq z\leq x$　とで表される領域の共通部分 V の体積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において，不等式 $x\geq 0$　と　$x+y^2+z^2\leq 5$　とで表される立体領域 V の体積を求める．

〔解説〕　$x\geq 0$，$x+y^2+z^2\leq 5$　より

$$0\leq x\leq 5-y^2-z^2\leq 5.$$

区間 $[0,5]$ の各実数 t に対して平面　$x=t$　と立体領域 V との共通部分を考える．不等式　$x+y^2+z^2\leq 5$　と方程式 $x=t$　とより，$t+y^2+z^2\leq 5$，$y^2+z^2\leq 5-t$；この不等式は，yz 座標平面において半径が　$\sqrt{5-t}$ の円で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\pi\sqrt{5-t}^2=\pi(5-t).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5\pi(5-t)\,dt=\pi\left[5t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^5=\pi\left(25-\frac{25}{2}\right)=\frac{25\pi}{2}.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.2}}$　xyz 座標空間において，不等式 $x\geq 0$　と　$y\geq 0$　と　$x^2+y+z^2\leq 6$ とで表される立体領域 V の体積を求めなさい．

$\boxed{\text{例題}}$　xyz 座標空間において，x 軸を中心とする半径 3 の円柱体と，z 軸を中心とする半径 3 の円柱体との共通部分 V の体積を求めなさい．

〔解説〕　x 軸を中心とする半径 3 の円柱体を表す不等式は　$y^2+z^2\leq 9$．z 軸を中心とする半径 3 の円柱体を表す不等式は　$x^2+y^2\leq 9$．これらの不等式より，

$$y^2\leq 9-z^2\leq 9,\qquad y^2\leq 9-x^2\leq 9,$$

従って　$-3\leq y\leq 3$．区間 $[-3,3]$ の各実数 t に対して平面　$y=t$　と立体領域 V との共通部分を考える．不等式　$x^2+y^2\leq 9$　と方程式　$y=t$　とより，$x^2+t^2\leq 9$，$x^2\leq 9-t^2$，$-\sqrt{9-t^2}\leq x\leq\sqrt{9-t^2}$．不等式 $y^2+z^2\leq 9$ と方程式 $y=t$ とより，$t^2+z^2\leq 9$，$z^2\leq 9-t^2$，$-\sqrt{9-t^2}\leq z\leq\sqrt{9-t^2}$．$xz$ 座標平面において不等式

$$-\sqrt{9-t^2}\leq x\leq\sqrt{9-t^2},\qquad -\sqrt{9-t^2}\leq z\leq\sqrt{9-t^2}$$

が表す領域は，x 軸方向の辺の長さ及び z 軸方向の辺の長さが　$2\sqrt{9-t^2}$　である正方形で囲まれる図形ある；その面積 $S(t)$ は

$$S(t)=\left(2\sqrt{9-t^2}\right)^2=4(9-t^2).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_{-3}^{3}S(t)\,dt=\int_{-3}^{3}4(9-t^2)\,dt=4\left[9t-\frac{1}{3}t^3\right]_{-3}^{3}=4(27-9+27-9)=144.$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺3.3}}$　xyz 座標空間において，y 軸を中心とする半径 2 の円柱体と，z 軸を中心とする半径 2 の円柱体との共通部分 V の体積を求めなさい．