

### 第8章の補遺3 座標空間における立体領域の体積

3次元座標空間における立体領域の体積を求めるために定理8.2を改変すると次のようになります。

**定理**  $xyz$  座標空間において、立体領域  $V$  に属す点の  $x$  座標のうち、最小値を  $a$  と、最大値を  $b$  とおく。区間  $[a, b]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸に垂直な平面  $x = t$  と領域  $V$  との共通部分になる平面領域の面積を  $S(t)$  とおく；この関数  $S$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとする。このとき、立体領域  $V$  の体積は  $\int_a^b S(t) dt$  である。

この定理では  $xyz$  座標空間における立体と  $x$  軸に垂直な平面との共通部分を考えましたが、 $y$  軸に垂直な平面との共通部分を考えることもできます。

**定理**  $xyz$  座標空間において、立体領域  $V$  に属す点の  $y$  座標のうち、最小値を  $a$  と、最大値を  $b$  とおく。区間  $[a, b]$  の各実数  $t$  に対して、 $x$  軸に垂直な平面  $y = t$  と領域  $V$  との共通部分になる平面領域の面積を  $S(t)$  とおく；この関数  $S$  は  $a$  から  $b$  まで積分可能であるとする。このとき、立体領域  $V$  の体積は  $\int_a^b S(t) dt$  である。

**例題**  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq y$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求める。

【解説】  $V$  の各点  $(x, y, z)$  について、 $x^2 + y^2 \leq 9$  なので、 $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$ 、よって  $-3 \leq x \leq 3$ 。区間  $[-3, 3]$  の各実数  $t$  に対して平面  $x = t$  と立体領域  $V$  との共通部分を考える。不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と方程式  $x = t$  とより、 $t^2 + y^2 \leq 9$ 、 $y^2 \leq 9 - t^2$ 、 $y \geq 0$  なので  $0 \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。更に不等式  $0 \leq z \leq y$  より  $0 \leq z \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$ ；この不等式は、 $yz$  座標平面において2辺の長さが  $\sqrt{9 - t^2}$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{9 - t^2} \sqrt{9 - t^2} = \frac{9 - t^2}{2}.$$

立体領域  $V$  の体積は、

$$\int_{-3}^3 S(t) dt = \int_{-3}^3 \frac{9 - t^2}{2} dt = \left[ \frac{9}{2}t - \frac{1}{6}t^3 \right]_{-3}^3 = 27 - 9 = 18.$$

$y$  軸に垂直な平面と  $V$  との共通部分を考えてもよい。

$V$  の各点  $(x, y, z)$  について、 $x^2 + y^2 \leq 9$  なので、 $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ 、 $-3 \leq y \leq 3$ 、更に  $y \geq 0$  なので  $0 \leq y \leq 3$ 。区間  $[0, 3]$  の各実数  $t$  に対して平面  $y = t$  と立体領域  $V$  との共通部分を考える。不等式  $x^2 + y^2 \leq 9$  と方程式  $y = t$  とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$ 、 $x^2 \leq 9 - t^2$ 、 $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。また、不等式  $0 \leq z \leq y$  と方程式  $y = t$  とより  $0 \leq z \leq t$ 。これらの不等式は、 $yz$  座標平面において  $x$  軸方向の辺の長さが  $2\sqrt{9 - x^2}$  で  $z$  軸方向の辺の長さが  $t$  である長

方形で囲まれる領域を表す；その面積  $S(t)$  は

$$S(t) = 2\sqrt{9 - t^2} t = 2t\sqrt{9 - t^2}.$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 2t\sqrt{9 - t^2} dt.$$

$u = 9 - t^2$  とおく。  $\frac{du}{dt} = -2t$  なので  $2t dt = -du$ 。  $t = 0$  のとき  $u = 9$ 、  $t = 3$  のとき  $u = 0$ 。 よって、

$$\int_0^3 2t\sqrt{9 - t^2} dt = \int_9^0 u^{\frac{1}{2}} (-du) = -\left[ \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_9^0 = 18.$$

故に立体領域  $V$  の体積は 18 である。 終

**問題 8.補遺3.1**  $xyz$  座標空間において不等式  $x^2 + y^2 \leq 3$  で表される円柱体と不等式  $0 \leq z \leq x$  とで表される領域の共通部分  $V$  の体積を求めなさい。

**例題**  $xyz$  座標空間において、不等式  $x \geq 0$  と  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

【解説】  $V$  の各点  $(x, y, z)$  について、  $x \geq 0$  かつ  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  なので、  $0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5$ 。 区間  $[0, 5]$  の各実数  $t$  に対して平面  $x = t$  と立体領域  $V$  との共通部分を考える。 不等式  $x + y^2 + z^2 \leq 5$  と方程式  $x = t$  とより、  $t + y^2 + z^2 \leq 5$ 、  $y^2 + z^2 \leq 5 - t$ ；この不等式は、  $yz$  座標平面において半径が  $\sqrt{5 - t}$  の円で囲まれる領域を表す；その面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \pi \sqrt{5 - t^2} = \pi(5 - t).$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^5 \pi(5 - t) dt = \pi \left[ 5t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^5 = \pi \left( 25 - \frac{25}{2} \right) = \frac{25\pi}{2}. \quad \text{終}$$

**問題 8.補遺3.2**  $xyz$  座標空間において不等式  $0 \leq y \leq 6 - x^2 - z^2$  で表される立体領域  $V$  の体積を求めなさい。

**例題**  $xyz$  座標空間において、不等式  $0 \leq x \leq 3$  と  $y \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $y + z \leq x^2$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求める。

$V$  の各点  $(x, y, z)$  について  $0 \leq x \leq 3$ 。 区間  $[0, 3]$  の各実数  $t$  に対して平面  $x = t$  と立体領域  $V$  との共通部分を考える。 不等式  $y + z \leq x^2$  と方程式  $x = t$  とより、  $y + z \leq t^2$ 。  $yz$  座標平面において、不等式  $y \geq 0$  と  $z \geq 0$  と  $y + z \leq t^2$  との連立で表される図形は、2辺の長さが  $t^2$  である直角二等辺三角形で囲まれる領域である。 その面積  $S(t)$  は

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot t^2 = \frac{t^4}{2}.$$

立体領域  $V$  の体積は

$$\int_0^3 \frac{t^4}{2} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{5} t^5 \right]_0^3 = \frac{243}{10}. \quad \text{終}$$

**問題 8.補遺3.3**  $xyz$  座標空間において、不等式  $x \geq 0$  と  $y \geq 0$  と  $0 \leq z \leq 3$  と  $x + y \leq e^z$  との連立で表される立体領域  $V$  の体積を求めなさい。  $e$  は自然対数の底です。

