

第8章の補遺3 座標空間における立体領域の体積

3次元座標空間における立体領域の体積を求めるために定理8.2を改変すると次のようになります。

定理 xyz 座標空間において、立体領域 V に属す点の x 座標のうち、最小値を a と、最大値を b とおく。区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸に垂直な平面 $x = t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。このとき、立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t) dt$ である。

この定理では xyz 座標空間における立体と x 軸に垂直な平面との共通部分を考えましたが、 y 軸に垂直な平面との共通部分を考えることもできます。

定理 xyz 座標空間において、立体領域 V に属す点の y 座標のうち、最小値を a と、最大値を b とおく。区間 $[a, b]$ の各実数 t に対して、 x 軸に垂直な平面 $y = t$ と領域 V との共通部分になる平面領域の面積を $S(t)$ とおく；この関数 S は a から b まで積分可能であるとする。このとき、立体領域 V の体積は $\int_a^b S(t) dt$ である。

例題 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq y$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求める。

【解説】 不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ より、
 $x^2 \leq 9 - y^2 \leq 9$ なので $-3 \leq x \leq 3$ 。区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $x = t$ とより、
 $t^2 + y^2 \leq 9$, $y^2 \leq 9 - t^2$, $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。更に不等式 $0 \leq z \leq y$ より $0 \leq z \leq y \leq \sqrt{9 - t^2}$ ；この不等式は、 yz 座標平面において2辺の長さが $\sqrt{9 - t^2}$ である直角二等辺三角形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{9 - t^2} \sqrt{9 - t^2} = \frac{9 - t^2}{2}.$$

立体領域 V の体積は、

$$\int_{-3}^3 S(t) dt = \int_{-3}^3 \frac{9 - t^2}{2} dt = \left[\frac{9}{2}t - \frac{1}{6}t^3 \right]_{-3}^3 = 27 - 9 = 18.$$

y 軸に垂直な平面と V との共通部分を考えてもよい。

不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ より $y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9$ なので $-3 \leq y \leq 3$ ，更に $y \geq 0$ なので $0 \leq y \leq 3$ 。区間 $[0, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$, $x^2 \leq 9 - t^2$, $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。また、不等式 $0 \leq z \leq y$ と方程式 $y = t$ とより $0 \leq z \leq t$ 。これらの不等式は、 yz 座標平面において x 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9 - x^2}$ で z 軸方向の辺の長さが t である長方形で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = 2\sqrt{9 - t^2} t = 2t\sqrt{9 - t^2}.$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^3 S(t) dt = \int_0^3 2t\sqrt{9 - t^2} dt.$$

$u = 9 - t^2$ とおく。 $\frac{du}{dt} = -2t$ なので $2t dt = -du$ 。 $t = 0$ のとき $u = 9$ ， $t = 3$ のとき $u = 0$ 。よって、

$$\int_0^3 2t\sqrt{9 - t^2} dt = \int_9^0 \frac{1}{2}(-du) = -\left[\frac{2}{3}u^{3/2} \right]_9^0 = 18.$$

故に立体領域 V の体積は 18 である。 □

問題 8.補遺3.1 xyz 座標空間において不等式 $x^2 + y^2 \leq 3$ で表される円柱体と不等式 $0 \leq z \leq x$ とで表される領域の共通部分 V の体積を求めなさい。

例題 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $x + y^2 + z^2 \leq 5$ とで表される立体領域 V の体積を求める。

【解説】 $x \geq 0$, $x + y^2 + z^2 \leq 5$ より

$$0 \leq x \leq 5 - y^2 - z^2 \leq 5.$$

区間 $[0, 5]$ の各実数 t に対して平面 $x = t$ と立体領域 V との共通部分を考える。不等式 $x + y^2 + z^2 \leq 5$ と方程式 $x = t$ とより、 $t + y^2 + z^2 \leq 5$, $y^2 + z^2 \leq 5 - t$ ；この不等式は、 yz 座標平面において半径が $\sqrt{5 - t}$ の円で囲まれる領域を表す；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi \sqrt{5 - t}^2 = \pi(5 - t).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_0^5 \pi(5 - t) dt = \pi \left[5t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^5 = \pi \left(25 - \frac{25}{2} \right) = \frac{25\pi}{2}. \quad \square$$

問題 8.補遺3.2 xyz 座標空間において、不等式 $x \geq 0$ と $y \geq 0$ と $x^2 + y + z^2 \leq 6$ とで表される立体領域 V の体積を求めなさい。

例題 xyz 座標空間において、 x 軸を中心とする半径 3 の円柱体と、 z 軸を中心とする半径 3 の円柱体との共通部分 V の体積を求めなさい。

【解説】 x 軸を中心とする半径 3 の円柱体を表す不等式は $y^2 + z^2 \leq 9$ 。 z 軸を中心とする半径 3 の円柱体を表す不等式は $x^2 + y^2 \leq 9$ 。これらの不等式より、

$$y^2 \leq 9 - z^2 \leq 9, \quad y^2 \leq 9 - x^2 \leq 9,$$

従って $-3 \leq y \leq 3$ 。区間 $[-3, 3]$ の各実数 t に対して平面 $y = t$ と立体領域 V との共通部分を考える。不等式 $x^2 + y^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $x^2 + t^2 \leq 9$, $x^2 \leq 9 - t^2$, $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。不等式 $y^2 + z^2 \leq 9$ と方程式 $y = t$ とより、 $t^2 + z^2 \leq 9$, $z^2 \leq 9 - t^2$, $-\sqrt{9 - t^2} \leq z \leq \sqrt{9 - t^2}$ 。 xz 座標平面において不等式 $-\sqrt{9 - t^2} \leq x \leq \sqrt{9 - t^2}$, $-\sqrt{9 - t^2} \leq z \leq \sqrt{9 - t^2}$

が表す領域は、 x 軸方向の辺の長さ及び z 軸方向の辺の長さが $2\sqrt{9 - t^2}$ である正方形で囲まれる図形ある；その面積 $S(t)$ は

$$S(t) = (2\sqrt{9 - t^2})^2 = 4(9 - t^2).$$

立体領域 V の体積は

$$\int_{-3}^3 S(t) dt = \int_{-3}^3 4(9 - t^2) dt = 4 \left[9t - \frac{1}{3}t^3 \right]_{-3}^3 = 4(27 - 9 + 27 - 9) = 144. \quad \square$$

問題 8.補遺3.3 xyz 座標空間において、 y 軸を中心とする半径 2 の円柱体と、 z 軸を中心とする半径 2 の円柱体との共通部分 V の体積を求めなさい。

