第8章の補遺4　定積分を用いる極限計算

定理6.3を思い起こして下さい：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき，正の自然数を表す変数 n に対して，

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\} .$$

この等式より，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx .$$

このことを極限計算に用いることがあります.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数を表す変数 n に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2}{n}k\right)^2\right\}$ があるならばそれを求める.

〔解説〕 極限値を表す式 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)\right\}$ が $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2}{n}k\right)^2\right\}$ となるように関数 f 及び定数 a, b を定める.

関数 f を $f(x)=x^2$ と定め，定数 a, b を $a=3$ ，$b=5$ とおく．このとき，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2}{n}k\right)^2 .$$

従って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{2}{n}k\right)^2\right\} &= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(a+\frac{b-a}{n}k\right)^2\right\} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_3^5 x^2\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^5 = \frac{1}{6}(125-27) = \frac{98}{6} \\ &= \frac{49}{3} .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺4.1}}$　正の自然数を表す変数 n に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2+\frac{5}{n}k}\right)$ があるならばそれを求めなさい.

$\boxed{\text{問題 8.補遺4.2}}$　正の自然数を表す変数 n に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{7}{n}k\right)\right\}$ があるならばそれを求めなさい.

$\boxed{\text{例題}}$　正の自然数を表す変数 n に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+5k}$ があるならばそれを求めなさい.

$$\frac{1}{2n+5k} = \frac{1}{n\left(2+\frac{5}{n}k\right)} = \frac{1}{n}\frac{1}{2+\frac{5}{n}k} .$$

従って，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+5k} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\frac{1}{2+\frac{5}{n}k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{5}{n}k}\right) \\ &= \frac{1}{5}\int_2^7\frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{5}\left[\ln x\right]_2^7 = \frac{1}{5}(\ln 7-\ln 2) \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{7}{2} .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 8.補遺4.3}}$　正の自然数を表す変数 n に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+6k}$ があるならばそれを求めなさい.