

第8章の補遺4 定積分を用いる極限計算

定理6.3を思い起こして下さい：関数 f が実数 a から実数 b まで積分可能であるとき、正の自然数を表す変数 n に対して、

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\}.$$

この等式より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

このことを極限計算に用いることがあります。

例題 正の自然数を表す変数 n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2}{n}k\right)^2 \right\}$ があるならばそれを求める。

【解説】 極限值を表す式 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \right\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2}{n}k\right)^2 \right\}$ となるように関数 f 及び定数 a, b を定める。

関数 f を $f(x) = x^2$ と定め、定数 a, b を $a = 3$, $b = 5$ とおく。このとき、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2}{n}k\right)^2.$$

従って、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(3 + \frac{2}{n}k\right)^2 \right\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + \frac{b-a}{n}k\right)^2 \right\} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_3^5 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_3^5 = \frac{1}{6} (125 - 27) = \frac{98}{6} \\ &= \frac{49}{3}. \end{aligned}$$

終

問題8.補遺4.1 正の自然数を表す変数 n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{2 + \frac{5}{n}k} \right)$ があるならばそれを求めなさい。

問題8.補遺4.2 正の自然数を表す変数 n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{7}{n}k\right) \right\}$ があるならばそれを求めなさい。

例題 正の自然数を表す変数 n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+5k}$ があるならばそれを求めなさい。

$$\frac{1}{2n+5k} = \frac{1}{n\left(2 + \frac{5}{n}k\right)} = \frac{1}{n} \frac{1}{2 + \frac{5}{n}k}.$$

従って、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+5k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} \frac{1}{2 + \frac{5}{n}k} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \frac{5}{n}k} \right) \\ &= \frac{1}{5} \int_2^7 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} [\ln x]_2^7 = \frac{1}{5} (\ln 7 - \ln 2) \\ &= \frac{1}{5} \ln \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

終

問題8.補遺4.3 正の自然数を表す変数 n に対して、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2n+6k}$ があるならばそれを求めなさい。