§1.6　数学的帰納法

$\boxed{\text{問題 1.6.1}}$

$a_1 = 1$ なので $a_1 = 1^3$.

2 以上の各自然数 n について， $a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1$ なので， $a_{n-1} = (n-1)^3$ ならば

$$a_n = a_{n-1} + 3n^2 - 3n + 1 = (n-1)^3 + 3n^2 - 3n + 1 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + 3n^2 - 3n + 1 = \\ = n^3 .$$

故に，数学的帰納法により，任意の正の自然数 n について $a_n = n^3$.

$\boxed{\text{問題 1.6.2}}$

$a_1 = 4$ なので $a_1 = \frac{4}{1}$.

2 以上の自然数 n について， $a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4}$ なので， $a_{n-1} = \frac{4}{n-1}$ ならば

$$a_n = \frac{4a_{n-1}}{a_{n-1} + 4} = \frac{4 \cdot \frac{4}{n-1}}{\frac{4}{n-1} + 4} = \frac{\frac{4}{n-1}}{\frac{1}{n-1} + 1} = \frac{4}{1 + n - 1} = \frac{4}{n} .$$

故に，数学的帰納法により，任意の正の自然数 n について $a_n = \frac{4}{n}$.

$\boxed{\text{問題 1.6.3}}$

$a_0 = 7$ なので $a_0 > 5$.

正の自然数 n について $a_{n-1} > 5$ とする． $3a_{n-1} + 10 > 3 \cdot 5 + 10 = 25$, $\sqrt{3a_{n-1} + 10} > \sqrt{25} = 5$, $a_n = \sqrt{3a_{n-1} + 10}$ なので $a_n > 5$. つまり，正の各自然数 n について， $a_{n-1} > 5$ ならば $a_n > 5$.

故に，数学的帰納法により，任意の自然数 n に対して $a_n > 5$.