

### 第3章の補遺2 対数微分法

#### 問題 3.補遺2.1

等式  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(x \ln x)$  の左辺は  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$  , 右辺は

$$\frac{d}{dx}(x \ln x) = \frac{d}{dx}x \cdot \ln x + x \frac{d}{dx} \ln x = \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1 ;$$

従って  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + 1$  ,  $\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1)$  .  $y = x^x$  なるので  $\frac{d}{dx} x^x = x^x(\ln x + 1)$  .

#### 問題 3.補遺2.2

(1)  $y = x^{\ln x}$  とおく.  $\ln y = \ln x^{\ln x} = \ln x \ln x = (\ln x)^2$  , よって  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx}(\ln x)^2$  . この

等式の左辺は  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$  , 右辺は

$$\frac{d}{dx}(\ln x)^2 = 2 \ln x \frac{d}{dx} \ln x = 2 \ln x \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} ;$$

従って  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{2 \ln x}{x}$  ,  $\frac{dy}{dx} = y \frac{2 \ln x}{x}$  , 故に  $\frac{d}{dx} x^{\ln x} = x^{\ln x} \frac{2 \ln x}{x} = 2x^{\ln x - 1} \ln x$  .

(2)  $y = x^{\frac{1}{x}}$  とおく.  $\ln y = \ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln x}{x}$  , よって  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x}$  . この等式の左辺は

$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$  , 右辺は

$$\frac{d}{dx} \frac{\ln x}{x} = \frac{\frac{d}{dx} \ln x \cdot x - \ln x \frac{d}{dx} x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} ;$$

従って  $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$  ,  $\frac{dy}{dx} = y \frac{1 - \ln x}{x^2}$  , 故に  $\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x} - 2} (1 - \ln x)$  .

(3)  $y = (\sin x + 2)^x$  とおく.  $\ln y = \ln(\sin x + 2)^x = x \ln(\sin x + 2)$  , よって  $\frac{d}{dx} \ln y =$

$\frac{d}{dx} \{x \ln(\sin x + 2)\}$  . この等式の左辺は  $\frac{d}{dx} \ln y = \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$  , 右辺は

$$\frac{d}{dx} \{x \ln(\sin x + 2)\} = \ln(\sin x + 2) + x \frac{\cos x}{\sin x + 2} .$$

従って

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln(\sin x + 2) + \frac{x \cos x}{\sin x + 2} ,$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left\{ \ln(\sin x + 2) + \frac{x \cos x}{\sin x + 2} \right\} ,$$

$$\frac{d}{dx} (\sin x + 2)^x = (\sin x + 2)^x \left\{ \ln(\sin x + 2) + \frac{x \cos x}{\sin x + 2} \right\} .$$