

§ 4.2 関数の極限の性質

問題 4.2.1 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{\sqrt{x}} = 7 \lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\frac{1}{2}} = 0$ なので, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = 81 - 0 = 81$, よって
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \left(81 + \frac{7}{\sqrt{x}}\right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$.

問題 4.2.2 $y = 3x - 7$ とおく. $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = 0.$$

$x \rightarrow -\infty$ のとき $y \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{3x-7} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^y = \infty.$$

問題 4.2.3 $x = 5 - 2y$ とおく. $y \rightarrow \infty$ のとき $x \rightarrow -\infty$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = 0.$$

$y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow \infty$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{8}{7}\right)^{5-2y} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{7}\right)^x = \infty.$$

問題 4.2.4 $\lim_{y \rightarrow \infty} \tan^{-1} y = \frac{\pi}{2}$ なので, $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4 \tan^{-1} y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}$, よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{4 \tan^{-1} y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{4 \tan^{-1} y}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$\lim_{y \rightarrow -\infty} \tan^{-1} y = -\frac{\pi}{2}$ なので, $\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4 \tan^{-1} y}{3} = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$, よって

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \cos\left(\frac{4 \tan^{-1} y}{3}\right) = \cos\left(\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{4 \tan^{-1} y}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

問題 4.2.5 $x = \frac{3}{2y}$ とおく. $y = \frac{3}{2x}$. $y \rightarrow -\infty$ のとき $x \rightarrow 0$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ なので,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(y \sin \frac{3}{2y}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2x} \sin x\right) = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

問題 4.2.6 $\lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^u = \infty$ なので, $\lim_{u \rightarrow -\infty} \left\{5\left(\frac{6}{7}\right)^u + 8\right\} = \infty$.

問題 4.2.7 $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{5}{y^2} = 0$ なので $\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{y^2} - 3\right) = -3$. また $\lim_{y \rightarrow \infty} \log_2 y = \infty$. よって

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{5}{y^2} - 3\right) \log_2 y\right\} = -\infty.$$

問題 4.2.8

$$\frac{4^x + 5^x}{6^x} = \frac{4^x}{6^x} + \frac{5^x}{6^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x.$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = 0.$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^x = \infty$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 5^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{5}{6}\right)^x\right\} = \infty.$$