§4.3　有理整関数・有理関数などの極限

問題 4.3.1　$\dfrac{2x^2-4x+5}{3}=\dfrac{x^2}{3}\left(2-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$.　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3}=\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=2$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x+5}{3}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2}{3}\left(2-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)\right\}=\infty\ .$$

問題 4.3.2　$\dfrac{3}{2}x^3-4x^2+5=x^3\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x^3}\right)$.　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)=\frac{3}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{2}x^3-4x^2+5\right)=\lim_{x\to-\infty}\left\{x^3\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}\right)\right\}=-\infty\ .$$

問題 4.3.3

$$\frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}=\frac{x^2\left(3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{1}{x}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$,　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x-5}{2x^3-5x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}}{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}\right)=0\ .$$

問題 4.3.4

$$\frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4}=\frac{x^4\left(1-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=x^2\frac{1-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$,　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{2}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x^2-7}{2x^2+3x-4}=\lim_{x\to\infty}\left(x^2\frac{1-\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}\right)=\infty\ .$$

問題 4.3.5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-3x^2}{2x^2-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{5}{x^2}-3\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^2}-3}{2-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}=-\frac{3}{2}\ .$$

問題 4.3.6　$x\to\infty$ のときを考えるので,　$x>0$ とする.

$$\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+3}=\frac{\sqrt{x\left(8+\frac{7}{x}\right)}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x}\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{x\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x}\cdot\frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}\ .$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^{-\frac{1}{2}}=0$,　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}=\frac{\sqrt{8}}{5}$ なので,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{8x+7}}{5x+7}=\lim_{x\to\infty}\left(x^{-\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{8+\frac{7}{x}}}{5+\frac{3}{x}}\right)=0\cdot\frac{\sqrt{8}}{5}=0\ .$$

問題 4.3.7　$x\to\infty$ のときを考えるので,　$x>0$ とする.　$\sqrt{x^2}=x$.

$$\frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5}=\frac{\sqrt{x^2\left(9-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}\right)}}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{9-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{x\sqrt{9-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}}{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}=\frac{\sqrt{9-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}}{4+\frac{5}{x}}\ .$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2-7x+8}}{4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^2}}}{4+\frac{5}{x}}=\frac{\sqrt{9}}{4}=\frac{3}{4}\ .$$