

§ 4.4 関数の連続性

問題 4.4.1 $y = 2x - 6$ とおく. $x - 3 = \frac{y}{2}$. $x \rightarrow 3$ のとき $y \rightarrow 0$ なので,

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{5}{x-3} \sin(2x-6) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{5}{\frac{y}{2}} \sin y \right) = 10 \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 10 \cdot 1 = 10 .$$

$g(3) = 5$ なので, $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \neq g(3)$. 故に関数 g は 3 において連続でない.

問題 4.4.2 $x \neq 0$ のとき, $\psi(x) = (1+x)^{\frac{3}{x}} = (1+x)^{\frac{1}{x} \cdot 3} = \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3$. 従って

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3 = \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right\}^3 = e^3 .$$

$\varphi(0) = e^3$ なので, $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \varphi(0)$. 故に関数 φ は 0 において連続である.