## § 5.4　関数の値の増減

$\boxed{\text{問題 5.4.1}}$

$$f'(x) = 9 - 2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 9 - 3\sqrt{x} = 3\bigl(3-\sqrt{x}\bigr) \quad (\ x \geq 0\ ) \quad .$$

$f'(x)=0$ とすると，$9-3\sqrt{x}=0$ なので $\sqrt{x}=3$，$x=9$．$0 \leq x < 9$ のとき，$\sqrt{x} < \sqrt{9} = 3$ なので $f'(x) = 3\bigl(3-\sqrt{x}\bigr) > 0$．$x > 9$ のとき，$\sqrt{x} > \sqrt{9} = 3$ なので $f'(x) = 3\bigl(3-\sqrt{x}\bigr) < 0$．従って，関数 $f$ は，区間 $[0,9]$ において単調増加であり，区間 $[9,\infty)$ において単調減少である．$f(9)=27$ なので，$f$ は $9$ において極大値 $27$ をとる．$f$ は極小値をとらない．

$\boxed{\text{問題 5.4.2}}$ $\psi'(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 3 = \ln x - 2 \quad (\ x > 0\ )$．$\psi(x) = 0$ とすると，$\ln x - 2 = 0$，$\ln x = 2$，よって $x = e^2$．$0 < x < e^2$ のとき，$\ln x < \ln e^2 = 2$ なので $\psi'(x) = \ln x - 2 < 0$．$x > e^2$ のとき，$\ln x > \ln e^2 = 2$ なので $\psi'(x) = \ln x - 2 > 0$．関数 $\psi$ は，区間 $(0,e^2]$ において単調減少であり，区間 $[e^2,\infty)$ において単調増加である．$\psi(e^2) = e^2\ln e^2 - 3e^2 = 2e^2 - 3e^2 = -e^2$．$\psi$ は $e^2$ において極小値 $-e^2$ をとる．$\psi$ は極大値をとらない．

$\boxed{\text{問題 5.4.3}}$ $\varphi'(x) = 3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3)$．$\varphi'(x) = 0$ とすると，$(3x-1)(x-3) = 0$ なので $x = \dfrac{1}{3}, 3$．$x < \dfrac{1}{3}$ のとき $\varphi'(x) > 0$，$\dfrac{1}{3} < x < 3$ のとき $\varphi'(x) < 0$，$x > 3$ のとき $\varphi'(x) > 0$．従って，関数 $\varphi$ は，区間 $\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right]$ において単調増加であり，区間 $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$ において単調減少であり，区間 $[3,\infty)$ において単調増加である．また，$\varphi$ は，$\dfrac{1}{3}$ において極大値 $\dfrac{13}{27}$ をとり，$3$ において極小値 $-9$ をとる．

$\boxed{\text{問題 5.4.4}}$

$$g'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{4}{x} - 1 = -\frac{x^2-4x+3}{x^2} = -\frac{(x-1)(x-3)}{x^2} \qquad (\ x > 0\ ) \ .$$

$g'(x) = 0$ とすると，$-\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2} = 0$ なので $x = 1, 3$．$0 < x < 1$ のとき $g'(x) < 0$，$1 < x < 3$ のとき $g'(x) > 0$，$x > 3$ のとき $g'(x) < 0$．従って，関数 $g$ は，区間 $(0,1]$ において単調減少であり，区間 $[1,3]$ において単調増加であり，区間 $[3,\infty)$ において単調減少である．$g(1) = 2$，$g(3) = 4\ln 3 - 2$．$g$ は，$1$ において極小値 $2$ をとり，$3$ において極大値 $4\ln 3 - 2$ をとる．