§5.5　関数の最大値・最小値

$\boxed{\text{問題 5.5.1}}$　$g'(x)=\dfrac{6}{1+x^2}-\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2(3-x)}{x^2+1}$ ．　$g'(x)=0$ とすると，$\dfrac{2(3-x)}{x^2+1}=0$ なので $x=3$ ．　$x<3$ のとき，$3-x>0$ なので $g'(x)=\dfrac{2(3-x)}{x^2+1}>0$ ．　$x>3$ のとき，$3-x<0$ なので $g'(x)=\dfrac{2(3-x)}{x^2+1}<0$ ．従って，関数 g は，区間 $(-\infty,3]$ において単調増加であり，区間 $[3,\infty)$ において単調減少である．　$g(3)=6\tan^{-1}3-\ln 10$ なので，関数 g は 3 において最大値 $6\tan^{-1}3-\ln 10$ をとる．　g は最小値をとらない．

$\boxed{\text{問題 5.5.2}}$　$\psi'(x)=-3x^2+16x-5=-(3x-1)(x-5)$ （ $2\leq x\leq 7$ ）．　$\psi'(x)=0$ とすると，$(3x-1)(x-5)=0$ ，$2\leq x\leq 7$ より $x=5$ ．　更に，$\psi(2)=14$ ，$\psi(5)=50$ ，$\psi(7)=14$ ．関数 ψ は，5 において最大値 50 をとり，2 と 7 とにおいて最小値 14 をとる．

$\boxed{\text{問題 5.5.3}}$

$$g'(x)=\frac{d}{dx}\left\{\sin x+\left(\frac{5}{4}-x\right)\cos x\right\}=\cos x-\left(\frac{5}{4}-x\right)\sin x-\cos x=\left(x-\frac{5}{4}\right)\sin x\ ,$$

但し $-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ ．　$g'(x)=0$ とする：$\left(x-\dfrac{5}{4}\right)\sin x=0$ より $x-\dfrac{5}{4}=0$ または $\sin x=0$ ；$-\dfrac{\pi}{2}\leq x\leq\dfrac{\pi}{2}$ なので，$x=\dfrac{5}{4}$ または $x=0$ ．

$$g\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\ ,\qquad g(0)=\frac{5}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{5}{4}\right)=\sin\frac{5}{4}\ ,\qquad g\left(\frac{\pi}{2}\right)=1\ .$$

$0<\dfrac{5}{4}<\dfrac{\pi}{2}$ で，区間 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ において関数 $\sin x$ は単調増加なので，$\sin 0<\sin\dfrac{5}{4}<\sin\dfrac{\pi}{2}$ ，つまり $0<\sin\dfrac{4}{3}<1$ ．　よって $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)<g\left(\dfrac{5}{4}\right)<g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<g(0)$ ．故に，関数 g は，0 において最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとり，$-\dfrac{\pi}{2}$ において最小値 -1 をとる．