§5.6　関数の最大値最小値の応用

問題 5.6.1　底面の長方形の辺の長さは $10-2x$ と $16-2x$ で高さは x なので，長方形柱の体積 $V(x)$ は

$$V(x) = (10-2x)(16-2x)x = 4(x^2-13x+40)\ .$$

微分すると

$$V'(x) = \frac{d}{dx}\{4(x^3-13x^2+40x)\} = 4(3x^2-26x+40) = 4(x-2)(3x-20)\ .$$

$V'(x)=0$ とすると，$x=2$ または $x=\dfrac{20}{3}$ ，$0<x<5$ なので $x=2$ ．$0<x<2$ のとき $V'(x)=4(x-2)(3x-20)>0$ ；$2<x<5$ のとき $V'(x)=4(x-2)(3x-20)<0$ ．関数 $V(x)$ は，区間 $[0,2]$ において単調増加であり，区間 $[2,5]$ において単調減少である．故に $V(x)$ が最大値をとるときの x の値は 2 である．

問題 5.6.2

(1)　$S=\pi r^2+2\pi rh$ なので，$2\pi rh=S-\pi r^2$ ，$h=\dfrac{S}{2\pi r}-\dfrac{r}{2}$ ．

(2)

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2\left(\frac{S}{2\pi r}-\frac{r}{2}\right) = \frac{S}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3\ .$$

(3)

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}r-\frac{\pi}{2}r^3\right) = \frac{S}{2}-\frac{3\pi}{2}r^2 = \frac{S-3\pi r^2}{2}\ .$$

(4)　$\dfrac{dS}{dr}=0$ とすると，$S-3\pi r^2=0$ なので，$r^2=\dfrac{S}{3\pi}$ ，$r>0$ なので $r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ ．$0<r<\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき，$r^2<\dfrac{S}{3\pi}$ ，$3\pi r^2<S$ ，よって $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}>0$ ．$r>\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき，$r^2>\dfrac{S}{3\pi}$ ，$3\pi r^2>S$ ，よって $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{S-3\pi r^2}{2}<0$ ．r の関数 V は，$0<r\leq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき単調増加であり，$r\geq\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のとき単調減少である．V が最大値になるのは，$r=\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ のときである．このとき

$$h = \frac{S}{2\pi r}-\frac{r}{2} = \frac{S}{2\pi}\sqrt{\frac{3\pi}{S}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{3\pi}} = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}\ .$$

側面積と底面積との和が S である直円柱の形の容器の容積が最大になるときの底面の円の半径は $\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ であり高さは $\sqrt{\dfrac{S}{3\pi}}$ である．