§5.7　不等式の証明

$\boxed{\text{問題 5.7.1}}$　正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=\dfrac{4}{x^2}-(3-x)$ ($x>0$) と定める． $f'(x)=-\dfrac{8}{x^3}+1=\dfrac{x^3-8}{x^3}$ ． $0<x<2$ のとき， $x^3<2^3=8$ なので $f'(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}<0$ ． $x>2$ のとき， $x^3>2^3=8$ なので $f'(x)=\dfrac{x^3-8}{x^3}>0$ ． 従って，関数 f は，区間 $(0,2]$ において単調減少であり，区間 $[2,\infty)$ において単調増加である．よって， f の最小値は $f(2)=0$ ． 故に，任意の正の実数 x について， $f(x)\geq 0$ つまり $\dfrac{4}{x^2}-(3-x)>0$ なので， $\dfrac{4}{x^2}\geq 3-x$ ．

$\boxed{\text{問題 5.7.2}}$　正の実数の全体 $(0,\infty)$ を定義域とする関数 f を $f(x)=ex-2-\ln x$ ($x>0$) と定める． $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}$ ($x>0$) ． $f'(x)=0$ とすると， $e-\dfrac{1}{x}=0$ ， $x=\dfrac{1}{e}$ ． $0<x<\dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x}>e$ なので $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}<0$ ． $x>\dfrac{1}{e}$ のとき， $\dfrac{1}{x}<e$ なので $f'(x)=e-\dfrac{1}{x}>0$ ． 従って関数 f は $\dfrac{1}{e}$ において最小値 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=0$ をとる． 故に，任意の正の実数 x について， $f(x)\geq 0$ つまり $ex-2-\ln x\geq 0$ なので， $\ln x\leq ex-2$ ．