§6.10　定積分を用いる極限計算

$\boxed{\text{問題 6.10.1}}$　自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = 2 + \dfrac{5}{n}k$ とおく．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は公差 $\dfrac{5}{n}$ の等差数列であり，

$$2 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{5}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{5}$ ．よって，

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2 + \frac{5}{n}k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}\,\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{x_k}\,\frac{x_k - x_{k-1}}{5}\right\} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\right\} \ .$$

ここで $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\right\}$ は関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和である．

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{5}{n} \ ;$$

この値は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\sqrt{x}$ のリーマン和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sqrt{x_k}\,(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\int_2^7 \sqrt{x}\,dx$ に収束する．故に

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{5}\int_2^7 \sqrt{x}\,dx = \frac{1}{5}\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_2^7 = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}\left(7\sqrt{7} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{14\sqrt{7} - 4\sqrt{2}}{15} \ .$$

$\boxed{\text{問題 6.10.2}}$　自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して

$$\frac{8}{3n + 4k} = \frac{1}{n}\frac{8}{3 + \frac{4}{n}k} \ .$$

自然数 $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n$ に対して $x_k = 3 + \dfrac{4}{n}k$ とおく．数列 $\{x_k\}_{0 \leq k \leq n}$ は公差 $\dfrac{4}{n}$ の等差数列であり，

$$3 = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = 7 \ .$$

自然数 $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ について，$x_k - x_{k-1} = \dfrac{4}{n}$ なので $\dfrac{1}{n} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{4}$ ．よって，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{3n + 4k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8}{3 + \frac{4}{n}k}\frac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8}{x_k}\,\frac{x_k - x_{k-1}}{4}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1})\right\} \ .$$

ここで $\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{2}{x_k}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和である．

$$\max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\} = \frac{4}{n} \ ;$$

この値は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．よって，関数 $\dfrac{2}{x}$ のリーマン和 $\sum_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{8}{x_k}(x_k - x_{k-1})\right\}$ は $n \to \infty$ のとき定積分 $\displaystyle\int_3^7 \frac{2}{x}\,dx$ に収束する．故に

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_3^7 \frac{2}{x}\,dx = 2\big[\ln|x|\big]_3^7 = 2(\ln 7 - \ln 3) = 2\ln\frac{7}{3} \ .$$