

§ 7.2 定積分の置換積分法

問題 7.2.1 変数 z を $z = 3y - 5$ とおく. $\frac{dz}{dy} = 3$ なので $dy = \frac{1}{3}dz$. $y = 2$ のとき $z = 1$, $y = 4$ のとき $z = 7$. よって,

$$\int_2^4 \frac{6}{(3y-5)^2} dy = \int_1^7 \frac{6}{z^2} \frac{1}{3} dz = 2 \left[-\frac{1}{z} \right]_1^7 = 2 \left(-\frac{1}{7} + 1 \right) = \frac{12}{7}.$$

問題 7.2.2

(1) 変数 y を $y = \frac{\pi(5x-3)}{6}$ とおく. $\frac{dy}{dx} = \frac{5\pi}{6}$ なので $dx = \frac{6}{5\pi} dy$. $x = 0$ のとき $y = -\frac{\pi}{2}$, $x = 3$ のとき $y = 2\pi$. よって,

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sin \frac{\pi(5x-3)}{6} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (\sin y) \frac{6}{5\pi} dy = \frac{6}{5\pi} [-\cos y]_{-\frac{\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{6}{5\pi} \left\{ -\cos 2\pi + \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\ &= -\frac{6}{5\pi}. \end{aligned}$$

(2) 変数 v を $v = 2u - 5$ とおく. $\frac{dv}{du} = 2$ なので $du = \frac{1}{2}dv$. $u = 2$ のとき $v = -1$, $u = 4$ のとき $v = 3$. よって,

$$\int_2^4 e^{2u-5} du = \int_{-1}^3 e^v \frac{1}{2} dv = \frac{1}{2} [e^v]_{-1}^3 = \frac{1}{2} \left(e^3 - \frac{1}{e} \right).$$

問題 7.2.3

(1) 変数 y を $y = x^2 + 2$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = -1$ のとき $y = 3$, $x = 2$ のとき $y = 6$. よって,

$$\int_{-1}^2 \frac{6x}{x^2+2} dx = \int_3^6 \frac{6}{y} \frac{1}{2} dy = 3 \int_2^6 \frac{1}{y} dy = 3 [\ln y]_3^6 = 3(\ln 6 - \ln 3) = 3 \ln 2.$$

(2) 変数 y を $y = x^2 + 9$ とおく. $\frac{dy}{dx} = 2x$ なので $x dx = \frac{1}{2} dy$. $x = 0$ のとき $y = 9$, $x = 4$ のとき $y = 25$. よって,

$$\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} dx = \int_9^{25} \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{1}{2} dy = \frac{1}{2} [2\sqrt{y}]_9^{25} = \sqrt{25} - \sqrt{9} = 2.$$

問題 7.2.4 変数 x を $x = \sin t + 2$ とおく. $\frac{dx}{dt} = \cos t$ なので $\cos t dt = dx$. $t = -\frac{\pi}{2}$ のとき $x = 1$, $t = \frac{\pi}{2}$ のとき $x = 3$. よって,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t) \sqrt{\sin t + 2} dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin t + 2)^{\frac{1}{2}} \cos t dt = \int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^3 = \frac{2}{3} 3\sqrt{3} - \frac{2}{3} \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$