§7.5　有理関数の積分法

$\boxed{\text{問題 7.5.1}}$　等式 $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-4}$ の両辺に $(x+1)(x-4)$ を掛けると

$$3x-22 = a(x-4)+b(x+1)\ ,$$
$$3x-22 = (a+b)x-4a+b\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は $a+b=3$ かつ $-4a+b=-22$ ；この方程式を解くと $a=5$ かつ $b=-2$ ． よって $\dfrac{3x-22}{(x+1)(x-4)} = \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{2}{x-4}$ なので,

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = \int \left(\frac{5}{x+1} - \frac{2}{x-4}\right)dx = \int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx\ .$$

変数 y を $y=x+1$ とおき，変数 z を $z=x-4$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ， $\dfrac{dz}{dx}=1$ なので $dx=dz$ ． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{x+1}\,dx - \int \frac{2}{x-4}\,dx &= 5\int \frac{1}{y}\,dy - 2\int \frac{1}{z}\,dz = 5\ln|y| - 2\ln|z| + C \\ &= 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C\ ,\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{3x-22}{(x+1)(x-4)}\,dx = 5\ln|x+1| - 2\ln|x-4| + C\ .$$

$\boxed{\text{問題 7.5.2}}$　$2x^2+x-6=(x+2)(2x-3)$ なので，ある定数 a, b をとると，x に関する次の恒等式が成り立つ：

$$\frac{x-12}{2x^2+x-6} = \frac{x-12}{(x+2)(2x-3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{2x-3}\ ,$$
$$x-12 = a(2x-3)+b(x+2)\ ,$$
$$x-12 = (2a+b)x-3a+2b\ ;$$

この等式が x に関する恒等式である条件は， $2a+b=1$ かつ $-3a+2b=-12$ ． この方程式を解くと $a=2$ ， $b=-3$ ． よって $\dfrac{x-12}{2x^2+x-6} = \dfrac{2}{x+2} - \dfrac{3}{2x-3}$ なので,

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{2x-3}\right)dx = \int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx\ .$$

変数 y を $y=x+2$ とおき，変数 z を $z=2x-3$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ， $\dfrac{dz}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dz$ ． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{2}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{2x-3}\,dx &= 2\int \frac{1}{y}\,dy - 3\int \frac{1}{z}\frac{1}{2}\,dz = 2\ln|y| - \frac{3}{2}\ln|z| + C \\ &= 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C\ .\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{x-12}{2x^2+x-6}\,dx = 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|2x-3| + C\ .$$

$\boxed{\text{問題 7.5.3}}$　x の 2 次式 $4x^2+4x+1$ を因数分解すると $4x^2+4x+1=(2x+1)^2$ ． 整式 $6x-1$ を $2x+1$ で割るとき整商は 3 で剰余は -4 なので， $6x-1=3(2x+1)-4$ ． よって

$$\frac{6x-1}{4x^2+4x+1} = \frac{3(2x+1)-4}{(2x+1)^2} = \frac{3}{2x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}\ .$$

従って,

$$\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+1}\,dx = \int \left\{\frac{3}{2x+1} - \frac{4}{(2x+1)^2}\right\}dx = \int \frac{3}{2x+1}\,dx - \int \frac{4}{(2x+1)^2}\,dx\ .$$

変数 y を $y=2x+1$ とおく． $\dfrac{dy}{dx}=2$ なので $dx=\dfrac{1}{2}dy$ ． 積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int \frac{3}{2x+1}\,dx - \int \frac{4}{(2x+1)^2}\,dx &= 3\int \frac{1}{y}\frac{1}{2}\,dy - 4\int y^{-2}\frac{1}{2}\,dy = \frac{3}{2}\ln|y| - 4\frac{1}{2}\frac{1}{-1}y^{-1} + C \\ &= \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{2}{2x+1} + C\ .\end{aligned}$$

故に

$$\int \frac{6x-1}{4x^2+4x+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|2x+1| + \frac{2}{2x+1} + C\ .$$

$\boxed{\text{問題 7.5.4}}$　$x^2-6x+13=(x-3)^2+4$ ． 変数 y を $y=x-3$ とおく． $x=y+3$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ． 積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{4x-7}{x^2-6x+13}\,dx &= \int \frac{4(y+3)-7}{y^2+4}\,dy = \int \left(\frac{4y+5}{y^2+4}\right)dy \\ &= \int \frac{4y}{y^2+4}\,dy + \int \frac{5}{y^2+4}\,dy = 2\ln(y^2+4) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{y}{2} + C \\ &= 2\ln(x^2-6x+13) + \frac{5}{2}\tan^{-1}\frac{x-3}{2} + C\ .\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 7.5.5}}$　$4x^2-8x+7=4(x-1)^2+3$ ． 変数 y を $y=x-1$ とおく． $x=y+1$ ． $\dfrac{dy}{dx}=1$ なので $dx=dy$ ． 積分定数を C とおく．

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-8}{4x^2-8x+7}\,dx &= \int \frac{5(y+1)-8}{4y^2+3}\,dx = \int \left(\frac{5y-3}{4y^2+3}\right)dy \\ &= \int \frac{5y}{4y^2+3}\,dy - \frac{3}{4}\int \frac{1}{y^2+\frac{3}{4}}\,dy = \frac{5}{8}\ln(4y^2+3) - \frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2y}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{5}{8}\ln(4x^2-8x+7) - \frac{\sqrt{3}}{2}\tan^{-1}\frac{2x-2}{\sqrt{3}} + C\ .\end{aligned}$$