§7.6　三角関数が現われる式の積分法

問題 7.6.1　変数 y を $y=\sin x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=\cos x$ なので $\cos x\,dx=dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\int\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{3+y^2}\,dy=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{\sin x}{\sqrt{3}}+C\ .$$

問題 7.6.2　$\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=(1-\cos^2 x)\sin x$ ．変数 y を $y=\cos x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\textstyle\int\sin^3 x\,dx&=\textstyle\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(1-y^2)(-dy)=\int(y^2-1)\,dy=\frac{1}{3}y^3-y+C\\&=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos y+C\ .\end{aligned}$$

問題 7.6.3　$\dfrac{\tan x}{\cos^2 x}=\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$ ．変数 y を $y=\cos x$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=-\sin x$ なので $\sin x\,dx=-dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx&=\int\frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^3 x}\sin x\,dx=\int\frac{1}{y^3}(-dy)\\&=\textstyle-\int y^{-3}dy=-\left(-\frac{1}{2}y^{-2}\right)+C=\frac{1}{2y^2}+C=\frac{1}{2\cos^2 x}+C\\&=\frac{1}{2}\sec^2 x+C\ .\end{aligned}$$

問題 7.6.4　変数 y を $y=5\sin x-7$ とおく．$\dfrac{dy}{dx}=5\cos x$ なので，$\cos x\,dx=-\dfrac{1}{5}dy$ ．積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos x}{5\sin x-7}\,dx&=\int\frac{1}{y}\frac{1}{5}dx=\frac{1}{5}\int\frac{1}{y}\,dy=\frac{1}{5}\ln|y|+C\\&=\frac{1}{5}\ln|5\sin x-7|+C\ .\end{aligned}$$

任意の実数 x について，$\sin x\leq 1$ なので，$5\sin x\leq 1$ ，$5\sin x-7\leq -2$ ，よって $|5\sin x-7|=7-5\sin x$ ．故に $\displaystyle\int\frac{\cos x}{5\sin x-7}\,dx=-\frac{1}{5}\ln(7-5\sin x)+C$ ．

問題 7.6.5　積分定数を C とおく．

$$\int\sin^2\frac{x}{6}\,dx=\int\frac{1-\cos\frac{x}{3}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-3\sin\frac{x}{3}\right)+C=\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\sin\frac{x}{3}+C\ .$$

問題 7.6.6

(1)　$\sin(2x-4)\sin(3x+2)=-\dfrac{1}{2}\{\cos(5x-2)-\cos(x+6)\}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\textstyle\int\sin(2x+3)\sin(3x-1)\,dx&=\textstyle-\frac{1}{2}\left\{\int\cos(5x-2)\,dx-\int\cos(x+6)\,dx\right\}\\&=-\frac{1}{2}\left\{\frac{\sin(5x-2)}{5}-\sin(x+6)\right\}+C\\&=\frac{\sin(x-2)}{2}-\frac{\sin(5x+6)}{10}+C\ .\end{aligned}$$

(2)　$\sin(7-3y)\cos(5y-2)=\dfrac{1}{2}\{\sin(2y+5)-\sin(8y-9)\}$ なので，積分定数を C とおくと，

$$\begin{aligned}\textstyle\int\sin(3y+2)\cos(5y-4)\,dy&=\textstyle\frac{1}{2}\left\{\int\sin(2y+5)\,dx-\int\sin(8y-9)\,dy\right\}\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\{-\cos(2y+5)\}-\frac{1}{8}\{-\cos(8y-9)\}\right]+C\\&=\frac{\cos(8y-9)}{16}-\frac{\cos(2y+5)}{4}+C\ .\end{aligned}$$