§7.7　一つの形の無理式の定積分

問題 7.7.1　$4-x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$ ． 変数 t を $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ （ $-2 \leq x \leq 2$ ）とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので，

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t \ .$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$ ． $x=1$ のとき $t = \dfrac{\pi}{6}$ ， $x=2$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$ ． 従って

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{4-x^2}\,dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t)^2 dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \big[2t + \sin 2t\big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + \sin\pi - \frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ .\end{aligned}$$

問題 7.7.2　$12-3x^2 \geq 0$ なので $-2 \leq x \leq 2$ ． $\sqrt{12-3x^2} = \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ （ $-2 \leq x \leq 2$ ）とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}$ なので $x = 2\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{x}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$ つまり $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので，

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-(2\sin t)^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\sqrt{\cos^2 t} = 2\cos t \ .$$

$x = 2\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 2\cos t$ なので $dx = 2\cos t\,dt$ ． $x=-1$ のとき $t = \sin^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{6}$ ， $x = \sqrt{3}$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$ ．

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{\sqrt{3}} \sqrt{12-3x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{3}\cdot 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt = 4\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 2\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2t)\,dt \\ &= 2\sqrt{3}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 3 + \sqrt{3}\pi \ .\end{aligned}$$

問題 7.7.3　$25-x^2 \geq 0$ なので $-5 \leq x \leq 5$ ． 変数 t を $t = \sin^{-1}\dfrac{x}{5}$ （ $-5 \leq x \leq 5$ ）とおく． $\sin t = \sin\left(\sin^{-1}\dfrac{x}{5}\right) = \dfrac{x}{5}$ なので $x = 5\sin t$ ． $-\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t \geq 0$ なので，

$$\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-(5\sin t)^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\sqrt{1-\sin^2 t} = 5\sqrt{\cos^2 t} = 5\cos t \ .$$

$x = 5\sin t$ より $\dfrac{dx}{dt} = 5\cos t$ なので $dx = 5\cos t\,dt$ ． $x = 0$ のとき $t = \sin^{-1}0 = 0$ ， $x = 4$ のとき $t = \sin^{-1}\dfrac{4}{5}$ ． 従って

$$\begin{aligned}\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx &= \int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} 5\cos t\cdot 5\cos t\,dt = 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \cos^2 t\,dt \\ &= 25\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{25}{2}\int_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} (1+\cos 2t)\,dt \\ &= \frac{25}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\sin^{-1}\frac{4}{5}} = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{4}\sin\left(2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) \ .\end{aligned}$$

ここで， $\sin\left(\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$ ，また，

$$\cos^2\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = 1 - \left\{\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\right\}^2 = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \ ,$$

$-\dfrac{\pi}{2} \leq \sin^{-1}\dfrac{4}{5} \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\left(\sin^{-1}\dfrac{4}{5}\right) \geq 0$ なので

$$\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5} \ .$$

よって

$$\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\sin\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)\cos\left(\sin^{-1}\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + \frac{25}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5} + 6 \ .$$

故に $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{25-x^2}\,dx = 6 + \frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{4}{5}$ ．