§8.1　平面図形の面積

$\boxed{\text{問題 8.1.1}}$

(1)

$$S_3 = \left(\frac{\xi_1}{2}+1-\frac{{\xi_1}^2}{8}\right)(x_1-x_0)+\left(\frac{\xi_2}{2}+1-\frac{{\xi_2}^2}{8}\right)(x_2-x_1)+\left(\frac{\xi_3}{2}+1-\frac{{\xi_3}^2}{8}\right)(x_3-x_2)\ .$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{\xi_k}{2}+1-\frac{{\xi_k}^2}{8}\right)(x_k-x_{k-1})\}\right\}\ .$$

これは関数 $\dfrac{x}{2}+1-\dfrac{x^2}{8}$ のリーマン和である.

(3) 領域 D の面積は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^4\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x^2}{8}\right)dx = \left[\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{24}x^3\right]_1^4 = \frac{33}{8}\ .$$

$\boxed{\text{問題 8.1.2}}$　方程式 $9-x^2=1-2x$ を解くと, $x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$, $x=4,-2$. $-2\le x\le 4$ のとき $9-x^2\ge 1-2x$. 従って求める面積は

$$\int_{-2}^{4}\{(9-x^2)-(1-2x)\}\,dx = \int_{-2}^{4}(-x^2+2x+8)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\right]_{-2}^{4} = 36\ .$$

$\boxed{\text{問題 8.1.3}}$　$\ln x=2$ とすると $x=e^2<9$. $x\ge e^2$ のとき $\ln x\ge \ln e^2=2$. 領域 D の面積は

$$\int_{e^2}^{9}(\ln x-2)\,dx = \left[x\ln x-3x\right]_{e^2}^{9} = 9\ln 9-27-e^2\ln e^2+3e^2 = e^2+9\ln 9-27\ .$$

$\boxed{\text{問題 8.1.4}}$　$0\le x\le\dfrac{5\pi}{2}$ の範囲で方程式 $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと $x=\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{3}$. $\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\sin x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $\dfrac{2\pi}{3}\le x\le\dfrac{7\pi}{3}$ のとき $\sin x\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 領域の面積は

$$\begin{aligned}
&\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{7\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\right)dx\\
&=\left[-\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}x+\cos x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{7\pi}{3}}\\
&=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\,\pi}{3}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{7\sqrt{3}\,\pi}{6}+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3}+\frac{1}{2}\\
&=2+\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}\ .
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 8.1.5}}$　不等式 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$ より $-b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}\le y\le b\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}}$. $t=\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ ($-a\le x\le a$) とおく. $x=a\sin t$, $dx=a\cos t\,dt$. $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos t\ge 0$ なので,

$$\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{(a\sin t)^2}{a^2}} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = \cos t\ .$$

$x=-a$ のとき $t=-\dfrac{\pi}{2}$, $x=a$ のとき $t=\dfrac{\pi}{2}$. 従って求める面積は

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a}\left\{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)\right\}dx &= 2b\int_{-a}^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx = 2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,a\cos t\,dt\\
&=2ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = ab\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=\pi ab\ .
\end{aligned}$$