§8.2　立体図形の体積

$\boxed{\text{問題 8.2.1}}$

(1)　共通部分の面積は三角錐の底面と相似な直角三角形であり，直角を挟む2辺の長さは $\dfrac{5\xi}{11}$ と $\dfrac{8\xi}{11}$ とである；よってその面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{5\xi}{11}\times\frac{8\xi}{11} = \frac{20\xi^2}{11^2} .$$

(2)

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{20{\xi_k}^2}{11^2}(x_k - x_{k-1})\right\} .$$

これは関数 $\dfrac{20}{11^2}x^2$ のリーマン和である.

(3)　三角錐 ABCD の体積は

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^{11}\frac{20}{11^2}x^2\,dx = \frac{20}{11^2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{11} = \frac{20}{11^2}\cdot\frac{1}{3}11^3 = \frac{220}{3} .$$

$\boxed{\text{問題 8.2.2}}$　与えられた回転体を V とおく．区間 $[0,3]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は $y=e^x-1$ のグラフに属すので，$r=e^t-1$ ；よって，この共通部分の面積 $S(t)$ は

$$S(t) = \pi r^2 = \pi(e^t-1)^2 = \pi(e^{2t}-2e^t+1) .$$

従って，回転体 V の体積は,

$$\int_0^3 S(t)\,dt = \pi\int_0^3 (e^{2t}-2e^t+1)\,dt = \pi\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2e^t+t\right]_0^3 = \pi\left(\frac{1}{2}e^6-2e^3+3-\frac{1}{2}+2\right)$$
$$= \pi\left(\frac{e^6+9}{2}-2e^3\right) .$$

$\boxed{\text{問題 8.2.3}}$　xy 座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ で囲まれる平面領域を x 軸を中心に回転させてできる回転体を V とおく．方程式 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ より $y^2=4\left(1-\dfrac{x^2}{5}\right)$ ．$y^2\geq 0$ なので x の値の範囲は $-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}$ ．区間 $\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$ の各実数 t に対して，x 軸の座標 t の点を含み x 軸に垂直な平面と V との共通部分は円である；その半径を r とおくと，xy 座標平面において点 (t,r) は楕円 $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$ に属すので $\dfrac{t^2}{5}+\dfrac{r^2}{4}=1$ ，よって $r^2=4\left(1-\dfrac{t^2}{5}\right)$ ；回転体の体積は

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}\pi r^2dx = \pi\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}4\left(1-\frac{t^2}{5}\right)dt = 4\pi\left[t-\frac{1}{15}t^3\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} = \frac{16}{3}\sqrt{5}\pi .$$