

§0.4 証明と定理

幾つかの述語 B, C, D, \dots が成り立つことを元に述語 A が成り立つことを論理的に推論することを、述語 A を**証明する** (prove) といいます；このときの推論を A の**証明** (proof) といい、推論の元にした述語 B, C, D, \dots を(証明の)論拠といいます。簡単にいうと論拠とは証明に用いられる根拠のことです。

論理的な推論の例を挙げます。

例 A君とB君とC君とが同じ向きを向いて1列に並んでいます。A君の後にB君がいて、B君の後にC君がいます。3人の各々に頭に一個ずつ帽子をかぶせます。A君は自分がかぶっている帽子を含めてどの帽子も見えません。B君はA君がかぶっている帽子が見えますが他の帽子は見えません。C君はA君がかぶっている帽子とB君がかぶっている帽子とが見えますが自分がかぶっている帽子は見えません。各人がかぶっている帽子の色は黒か白かのどちらかであり、3人のうち少なくとも2人は黒色の帽子をかぶっていることを3人に知らせます。まずC君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねると“分かります”と答えました。次にB君に自分がかぶっている帽子は何色か尋ねると“黒色です”と答えました。B君もC君も正直であり論理的思考力は充分あるとします。これらのことを論拠として、A君がかぶっている帽子は何色か論理的に推論します。

3人のうち少なくとも2人は黒色の帽子をかぶっているので、A君もB君も白色の帽子をかぶっていることはありません。A君が黒色の帽子をかぶりB君が白色の帽子をかぶっているとき、及び、A君が白色の帽子をかぶりB君が黒色の帽子をかぶっているとき、C君は自分が黒色の帽子をかぶっていると分かります。A君もB君も黒色の帽子をかぶっているとき、C君は自分は何色の帽子をかぶっているか分かりません。C君は自分は何色の帽子をかぶっているか分かりましたから、A君が黒色の帽子をかぶっているならばB君は白色の帽子をかぶっていて、A君が白色の帽子をかぶっているならばB君は黒色の帽子をかぶっています。B君はA君がかぶっている帽子を見て自分は黒色の帽子をかぶっていると分かりましたから、A君は白色の帽子をかぶっています。こうしてA君がかぶっている帽子は白色と論理的に推論されます。 終

問題 0.4.1 A君とB君とC君とが同じ向きを向いて1列に並んでいます。A君の後にB君がいて、B君の後にC君がいます。3人の各々に頭に一個ずつ帽子をかぶせます。A君は自分がかぶっている帽子を含めてどの帽子も見えません。B君はA君がかぶっている帽子が見えますが他の帽子は見えません。C君はA君がかぶっている帽子とB君がかぶっている帽子とが見えますが自分がかぶっている帽子は見えません。各人がかぶっている帽子の色は黒か白かのどちらかであり、3人のうち少なくとも1人は黒色の帽子をかぶっていることを3人に知らせます。まずC君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねると“分かりません”と答えました。次にB君に自分がかぶっている帽子の色が分かるかどうか尋ねるとやはり“分かりません”と答えました。B君もC君も正直であり論理的思考力は充分あるとします。これらのことを論拠として、A君がかぶっている帽子は何色か論理的に推論しなさい。

問題 0.4.2 A君とB君とC君とD君との4人が、自分たちの鞆を傍らに置いて公園で遊んでいましたが、急に雨が降ってきたので慌てて鞆をつかんで家に帰りました。ところが、慌てたため間違えて別の人の鞆を持って帰ったりしました。A君とB君とC君とD君とは次のように話しました。

A君の話：僕は自分の鞆を一つ持って行ったのに持って帰るのを忘れました。

B君の話：僕は自分の鞆を一つ持って行って間違えてA君の鞆を持って帰りました。

C君の話：僕は自分の鞆を持って行かなかったのに間違えて誰か別の人の鞆を持って帰りました。

D君の話：僕は自分の鞆を一つ持って行って間違えて誰か別の人の鞆を持って帰りました。

これらの話を論拠として、B君の鞆を持って帰ったのは誰か推論しなさい。

証明において、仮に述語 A を論拠にすること、つまり、仮に述語 A を根拠にして議論することを、述語 A を**仮定する** といいます。述語 A を仮定して述語 B が証明される(証明に A 以外の論拠があってもよい)とき、述語 A から述語 B が導かれる といいます。

述語 A と B について次のことが成り立ちます。 A から B が導かれるとき、述語 “ A ならば B ” が導かれます。 A と述語 “ A ならば B ” とから、 B が導かれます。

数学では数学的内容の述語を扱います。数学的に認められている命題だけを論拠として証明される命題を**定理** (theorem) といいます。数学的に認められている命題と定理だけを論拠として証明される命題はやはり定理です；つまり定理を証明するために既に証明された別の定理を論拠にできます。

例 数学的に認められている命題の例として、次の三角形の合同条件があります：任意の2つの三角形について、対応する辺の長さがそれぞれ等しいとき、この2つの三角形は合同である。この命題を論拠にして例えば次の定理が証明できます：平面上の相異なる任意の3点 A, B, C について、 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ならば $\angle ABC = \angle ACB$. 終