§0.5　述語の同値性

述語 $\mathcal{P}$ と述語 $\mathcal{Q}$ とについて，$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ とが**同値である** (equivalent) とは，

$\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ が導かれ，逆に $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{P}$ が導かれる

ことです．述語 $\mathcal{P}$ と述語 $\mathcal{Q}$ とが同値であることを次のように書き表します：

$$\mathcal{P} \iff \mathcal{Q} .$$

$\boxed{\text{例}}$　変数 x に関する述語 $x-3=0$ から，x に関する述語 $x=3$ が導かれます．逆に，$x=3$ のとき $x-3=0$ ですから，述語 $x=3$ から述語 $x-3=0$ が導かれます．従って述語 $x-3=0$ と述語 $x=3$ とは同値です：

$$x-3=0 \iff x=3 .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　整数を表す変数 n に関する述語 “ n は 6 の倍数である ” と “ n は 2 と 3 との公倍数である ” とは同値です：

n は 6 の倍数である $\iff$ n は 2 と 3 との公倍数である .

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{例}}$　平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A, B, C}$ を頂点とする三角形 ABC について考えます．辺 AB の長さ $\overline{\mathrm{AB}}$ と辺 AC の長さ $\overline{\mathrm{AC}}$ とが等しいとすると，角度 $\angle\mathrm{ABC}$ と角度 $\angle\mathrm{ACB}$ とが等しいことが証明できます；つまり述語 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ から述語 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$ が導かれます．逆に，$\angle\mathrm{ABC}$ と $\angle\mathrm{ACB}$ とが等しいとすると，$\overline{\mathrm{AB}}$ と $\overline{\mathrm{AC}}$ とが等しいことが証明できます；つまり述語 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$ から述語 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ が導かれます．従って，述語 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ と述語 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$ とは同値です：

$$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}} \iff \angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB} .$$

$\boxed{\text{終}}$