§0.7　集合

対象の集まりについて，その集まりに属すか属さないかの客観的基準があるとき，その集まりを**集合** (set) といいます．例えば，“小さい自然数の全体”という集まりは，自然数について小さいことの客観的基準がないので集合ではありません．しかし，“10 以下の自然数の全体”という集まりは，属すか属さないかの基準が客観的なので集合です．

集合に属す対象のことを，その集合の**要素** (element) または元といいます．

集合 A と集合 B とが等しいとは，つまり $A=B$ とは，A の要素が総て B の要素であり，逆に B の要素が総て A の要素であることです．

集合の表現法として，集合の要素を定める述語を記述する方法があります．

例　0 以上 9 以下の奇数の全体を次のように述語を用いて書き表します：

$$\{\, x \mid x \text{ は0以上9以下の奇数である} \,\} .$$

この集合の要素は $1,3,5,7,9$ の5個の数です．これらの要素を列挙して集合を書き表すこともあります：

$$\{\, x \mid x \text{ は0以上9以下の奇数である} \,\} = \{1,3,5,7,9\} .$$ 終

例　$x^2=9$ である整数 x の全体を次のように述語を用いて書き表します：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2=9 \,\} .$$

$x^2=9$ である整数は 3 と -3 との2つだけですから，

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2=9 \,\} = \{3,-3\} .$$ 終

例　12 の約数である整数の全体を次のように述語を用いて書き表します：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で 12 の約数である} \,\} .$$

要素を列挙して書き表すと次のようになります：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で 12 の約数である} \,\} = \{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,12,-12\} .$$ 終

例　0 以上の整数で 3 の倍数の全体を次のように述語を用いて書き表します：

$$\{\, x \mid x \text{ は0以上の整数で 3 の倍数である} \,\} .$$

この集合の要素は無限にあります：

$$\{\, x \mid x \text{ は0以上の整数で 3 の倍数である} \,\} = \{0,3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,\ldots\} .$$ 終

問題 0.7.1　集合 $\{\, x \mid x \text{ は } 0 \le x \le 50 \text{ である整数で 7 の倍数である} \,\}$ を要素を総て列挙する表現法で表しなさい．

前述したように，集合とは属すか属さないかについて客観的基準がある集まりです．“どんな対象も属さない”というのも客観的基準なので，どんな対象も属さない集まりも集合と考えます．このように要素が無い集合を**空集合**といいます．空集合を記号 $\emptyset$ で表します．

例　$3x=7$ である整数 x の全体

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$$

は，属すか属さないかについて客観的基準がありますから集合です．しかし，$3x=7$ である整数 x はありませんから，この集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$ の要素はありません．つまり，集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\}$ は空集合 $\emptyset$ です：

$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } 3x=7 \,\} = \emptyset .$$

このように要素が無い集合は総て空集合です：

$$\{\, x \mid x \text{ は自然数で } x<0 \,\} = \emptyset ,$$
$$\{\, x \mid x \text{ は整数で } x^2=3 \,\} = \emptyset .$$ 終

集合を右図のような図で表すことがあります．線で囲まれた内側が集合の範囲，というような意図です．右図の集合 S は @, &, ※, ∗, ♪ を要素とする集合です：

$$S = \{\, @, \&, ※, *, ♪ \,\} .$$

対象 a が集合 A に属すこと，つまり a が集合 A の要素であることを，次のように書き表します：

$$a \in A .$$

対象 a が集合 A に属さないこと，つまり a が集合 A の要素でないことを，次のように書き表します：

$$a \notin A$$

これは“ $a \in A$ でない”ということです．

例　集合 $S=\{0,1,4,6,8,9\}$ について次のようになります：

$$0 \in S ,\quad 1 \in S ,\quad 2 \notin S ,\quad 3 \notin S ,\quad 4 \in S ,\quad 5 \notin S ,\quad 6 \in S ,\quad \ldots .$$ 終

例　3 の倍数である整数の全体を T とおきます：

$$T = \{\, x \mid x \text{ は整数で 3 の倍数である} \,\} .$$

このとき，

$$0 \in T ,\quad 1 \notin T ,\quad 2 \notin T ,\quad 3 \in T ,\quad 4 \notin T ,\quad 5 \notin T ,\quad 6 \in T ,\quad \ldots .$$

一般的に，任意の整数 x について，

$$x \in T \iff x \text{ は 3 の倍数} \iff x \text{ は 3 で割り切れる}$$
$$\iff x \text{ について各桁の数の和が 3 で割り切れる} .$$

よって例えば次のようになります：

3456 について各桁の数の和 $3+4+5+6$ は 3 で割り切れるので $3456 \in T$ ；
4567 について各桁の数の和 $4+5+6+7$ は 3 で割り切れないので $4567 \notin T$ ．終

問題 0.7.2　9 の倍数である整数の全体を N とおきます：

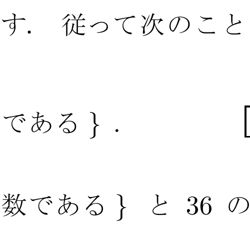
$$N = \{\, x \mid x \text{ は整数で 9 の倍数である} \,\} .$$

次のことが成り立ちます：任意の整数 x について，

$$x \in N \iff x \text{ は 9 の倍数} \iff x \text{ は 9 で割り切れる}$$
$$\iff x \text{ において各桁の数の和が 9 で割り切れる} .$$

(1)　$2345 \in N$ か $2345 \notin N$ か判定しなさい．
(2)　$3456 \in N$ か $3456 \notin N$ か判定しなさい．

集合 A と集合 B とについて，A の要素が総て B に属すとき，集合 B は集合 A を**含む**，或いは，集合 A は集合 B に**含まれる**といいます．集合 A が集合 B に含まれるとき，集合 A は集合 B の**部分集合** (subset) であるといい，次のように書き表します[6)]：



$$A \subset B .$$

これは，直感的にいうと，右図のように集合 A の範囲より集合 B の範囲の方が広いことを意味します．

例　6 の倍数は総て 3 の倍数ですから，集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で 6 の倍数である} \,\}$ の要素は総て集合 $\{\, x \mid x \text{ は整数で 3 の倍数である} \,\}$ に属します．従って次のことがいえます：

$$\{\, x \mid x \text{ は 6 の倍数である} \,\} \subset \{\, x \mid x \text{ は 3 の倍数である} \,\} .$$ 終

問題 0.7.3　12 の約数の全体 $A = \{\, x \mid x \text{ は整数で 12 の約数である} \,\}$ と 36 の約数の全体 $B = \{\, x \mid x \text{ は整数で 36 の約数である} \,\}$ とについて，$A \subset B$ か，$B \subset A$ か，どちらでもないか，判定しなさい．

集合 A と B とについて次のことに注意して下さい：

$$A = B \text{ のときも } A \subset B .$$

また，空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合です．

合成された述語で定められる集合を考えます．

例　集合

$$A = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，30 の約数でない} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうちで 30 の約数でない整数の全体ですから，

$$A = \{0,4,7,8,9\} .$$

集合

$$B = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，30 の約数でありかつ偶数である} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち 30 の約数でありかつ偶数である整数の全体ですから，

$$B = \{2,6\} .$$

集合

$$C = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，30 の約数であるかまたは偶数である} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち 30 の約数であるかまたは偶数である整数の全体ですから，

$$C = \{0,1,2,3,4,5,6,8\} .$$

集合

$$D = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，30 の約数であるならば偶数である} \,\}$$

は，0 以上 9 以下の整数のうち 30 の約数であるならば偶数である整数の全体，つまり，0 以上 9 以下の整数のうち 30 の約数でないかまたは偶数である整数の全体ですから，

$$D = \{0,2,4,6,7,8,9\} .$$ 終

問題 0.7.4　以下の集合を要素を列挙する表現で書き表しなさい．

$$A = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，42 の約数でない} \,\} .$$
$$B = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，42 の約数でありかつ奇数である} \,\} .$$
$$C = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，42 の約数であるかまたは奇数である} \,\} ,$$
$$D = \{\, x \mid x \text{ は，0以上9以下の整数で，42 の約数であるならば奇数である} \,\} .$$

---

6) 部分集合を表す記号は‘$\subset$’の替わりに‘$\subseteqq$’を用いることもあります．