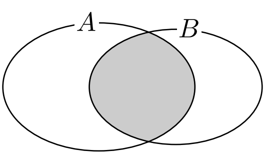
§0.8　集合の演算

集合 A と集合 B との両方に属す対象の全体を A と B との**共通部分**といい，$A\cap B$ と書き表します[8]：

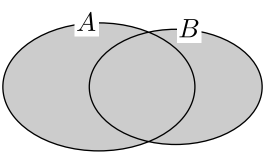
$$A\cap B=\{\,x\mid x\in A\ \ \text{かつ}\ \ x\in B\,\}\ .$$



集合 A と集合 B との共通部分 $A\cap B$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになります.

集合 A か集合 B かの少なくともどちらかに属す対象の全体を A と B との**合併集合**あるいは和集合といい，$A\cup B$ と書き表します[9]：

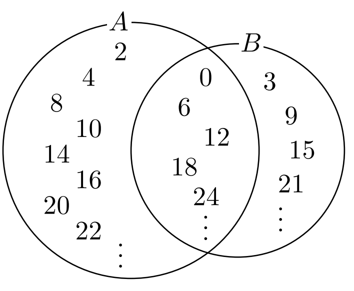
$$A\cup B=\{\,x\mid x\in A\ \ \text{または}\ \ x\in B\,\}\ .$$



集合 A と集合 B との合併集合 $A\cup B$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになります.

例　集合 A と集合 B とを次のように定めます：

$$A=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で2の倍数}\,\}=\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,\ldots\}\ ,$$
$$B=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で3の倍数}\,\}=\{0,3,6,9,12,15,18,21,\ldots\}\ .$$



A と B との共通部分 $A\cap B$ は A と B との両方に属す対象の全体ですから，

$$\begin{aligned}A\cap B&=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で2の倍数でかつ3の倍数}\,\}\\&=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で2と3との公倍数}\,\}\\&=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で6の倍数}\,\}\\&=\{0,6,12,18,24,\ldots\}\ .\end{aligned}$$

A と B との合併部分 $A\cup B$ は A か B か少なくともどちらかに属す対象の全体ですから，

$$\begin{aligned}A\cup B&=\{\,n\mid n\ \text{は0以上の整数で2の倍数かまたは3の倍数}\,\}\\&=\{0,2,3,4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,24,\ldots\}\ .\end{aligned}$$

終

問題 0.8.1　集合 A と集合 B とを次のように定めます：

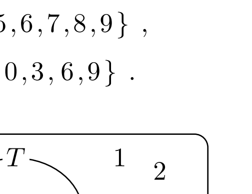
$$A=\{\,x\mid x\ \text{は0以上の整数で 30 の約数}\,\}\ ,$$
$$B=\{\,x\mid x\ \text{は0以上の整数で 40 の約数}\,\}\ .$$

集合 A と集合 B との共通部分 $A\cap B$ と合併集合 $A\cup B$ とを，要素を列挙する表現で書き表しなさい.

考える対象の範囲がある集合に限定されているとき，その集合を**全体集合**といいます. 例えば，整数について考えるときは整数の全体が全体集合です. また例えば，高専生について考えるときは高専生の全体が全体集合です.

全体集合 U が定まっているとき，U の部分集合 A に対して，U の要素で A に属さない対象の全体を，U に対する A の**補集合**といい，$\overline{A}$ と書き表します[10]：

$$\overline{A}=\{\,x\mid x\in U\ \ \text{かつ}\ \ x\notin A\,\}\ .$$



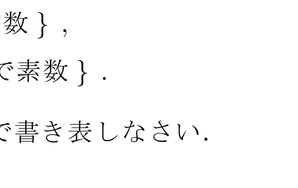
全体集合 U に対する集合 A の補集合 $\overline{A}$ の“感じ”を図で表すと右図の網掛けの部分のようになります.

例　全体集合 S 及びその部分集合 T を次のように定めます：

$$S=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数}\,\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$
$$T=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数で3の倍数}\,\}=\{0,3,6,9\}\ .$$

このとき，S に対する T の補集合 $\overline{T}$ は，全体集合 S の要素で T に属さない対象の全体ですから，

$$\overline{T}=\{1,2,4,5,7,8\}\ .$$



終

問題 0.8.2　全体集合 U 及びその部分集合 A を次のように定めます：

$$U=\{\,x\mid x\ \text{は9以下の正の整数}\,\}\ ,$$
$$A=\{\,x\mid x\ \text{は9以下の正の整数で素数}\,\}\ .$$

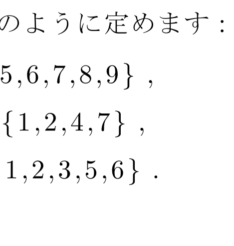
U に対する A の補集合 $\overline{A}$ を，要素を列挙する表現で書き表しなさい.

例　全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定めます：

$$U=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数}\,\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$
$$A=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数で2の倍数}\,\}=\{0,2,4,6,8\}\ ,$$
$$B=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数で3の倍数}\,\}=\{0,3,6,9\}\ .$$

このとき次のようになります：

$$\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}\ \ \text{なので}\ \ \overline{A}\cap B=\{3,9\}\ ,$$
$$\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}\ \ \text{なので}\ \ \overline{A}\cup B=\{0,1,3,5,6,7,9\}\ ,$$
$$A\cap B=\{0,6\}\ \ \text{なので}\ \ \overline{A\cap B}=\{1,2,3,4,5,7,8,9\}\ ,$$
$$A\cup B=\{0,2,3,4,6,8,9\}\ \ \text{なので}\ \ \overline{A\cup B}=\{1,5,7\}\ .$$



終

問題 0.8.3　全体集合 U 及びその部分集合 A と B とを次のように定めます：

$$U=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数}\,\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ ,$$
$$A=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数で28の約数}\,\}=\{1,2,4,7\}\ ,$$
$$B=\{\,x\mid x\ \text{は0以上9以下の整数で30の約数}\,\}=\{1,2,3,5,6\}\ .$$

以下の集合を，要素を列挙する表現で書き表しなさい.

(1) $A\cap\overline{B}$.　(2) $A\cup\overline{B}$.　(3) $\overline{A\cap B}$.　(4) $\overline{A\cup B}$.

対象 a と b とをこの順に並べた対 (a,b) を，a と b との**順序対**あるいは2項対といいます. 対象 a と b との順序対 (a,b) において a 及び b を**成分**といいます. 任意の対象 u,v,x,y について，順序対 (u,v) と (x,y) とが等しいとは，1番めの成分 u と x とが等しく2番めの成分 v と y とが等しいことです：

$$(u,v)=(x,y)\iff u=x\ \ \text{かつ}\ \ v=y\ .$$

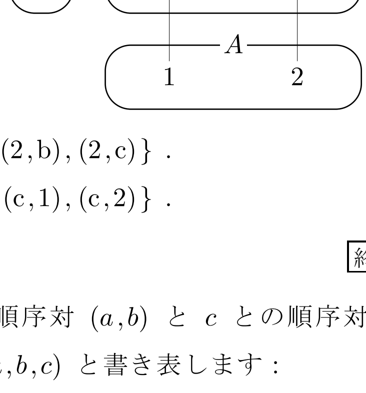
ですから，例えば，順序対 $(1,2)$ と順序対 $(2,1)$ とは異なる対象です：$(1,2)\neq(2,1)$.

日本人の姓名は，通常，家系で決まる“姓”の部分と個人の“名”の部分とから成ります. 数学的にはこのような日本人の姓名は姓と名との順序対と考えられます. 例えば，“山田太郎”という姓名は，“山田”という姓と“太郎”という名との順序対 (山田,太郎) です.

集合 A と B とに対して，A の要素 x と B の要素 y との順序対 (x,y) の全体を A と B との**直積集合**といい，$A\times B$ と書き表します：

$$A\times B=\{\,(x,y)\mid x\in A\ \ \text{かつ}\ \ y\in B\,\}\ .$$

例　集合 $A=\{1,2\}$ と集合 $B=\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c}\}$ とを考えます. A と B との直積集合 $A\times B$ は右図のようになります. 直積集合 $A\times B$ と直積集合 $B\times A$ とは次のようになります：



$$A\times B=\{\,(1,\mathrm{a}),(1,\mathrm{b}),(1,\mathrm{c}),(2,\mathrm{a}),(2,\mathrm{b}),(2,\mathrm{c})\,\}\ .$$
$$B\times A=\{\,(\mathrm{a},1),(\mathrm{a},2),(\mathrm{b},1),(\mathrm{b},2),(\mathrm{c},1),(\mathrm{c},2)\,\}\ .$$

よってこのとき $A\times B\neq B\times A$.

終

3つの対象 a と b と c について，a と b との順序対 (a,b) と c との順序対 $\big((a,b),c\big)$ を a と b と c との3項組といい，単に (a,b,c) と書き表します：

$$(a,b,c)=\big((a,b),c\big)\ .$$

任意の対象 u,v,w,x,y,z について，

$$\begin{aligned}(u,v,w)=(x,y,z)&\iff\big((u,v),w\big)=\big((x,y),z\big)\\&\iff(u,v)=(x,y)\ \ \text{かつ}\ \ w=z\\&\iff u=x\ \ \text{かつ}\ \ v=y\ \text{かつ}\ \ w=z\ .\end{aligned}$$

通常の電話番号は，数学的には，市外局番と市内局番と加入者番号との3項組と考えられます. 例えば，豊田工業高等専門学校の代表電話番号 0565-32-8811 は，市外局番 0565 と市内局番 32 と加入者番号 8811 との3項組 (0565,32,8811) です.

集合 A と B と C とに対して，A の要素 x と B の要素 y と C の要素 z との3項組 $(x,y,z)=\big((x,y),z\big)$ の全体を A と B と C との直積集合といい，$A\times B\times C$ と書き表します：

$$\begin{aligned}A\times B\times C&=\{\,(x,y,z)\mid x\in A\ \ \text{かつ}\ \ y\in B\ \ \text{かつ}\ \ z\in C\,\}\\&=\{\,\big((x,y),z\big)\mid(x,y)\in A\times B\ \ \text{かつ}\ \ z\in C\,\}\\&=\{\,(w,z)\mid w\in A\times B\ \ \text{かつ}\ \ z\in C\,\}\\&=(A\times B)\times C\ .\end{aligned}$$

---

8) 共通部分を表す記号 ∩ は“キャップ”(cap) とか“インターセクション”(intersection) とか言います.

9) 合併集合を表す記号 ∪ は“カップ”(cup) とか“ユニオン”(union) とか言います.

10) 補集合を表す記号 ‾ は“バー”(bar) などと言います.