§0.9 集合の要素の個数

集合 S の要素が有限個であるとき，集合 S は有限集合であるといいます． また，集合 S の要素が無限にあるとき，集合 S は無限集合であるといいます． 有限集合 S の要素の個数を $|S|$ と書き表すことがあります． つまり，有限集合 S の要素が丁度 n 個あるとき $|S|=n$ です．

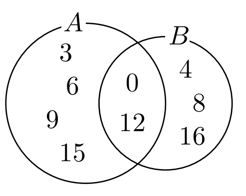
空集合 $\emptyset$ の要素は一つもありませんから，空集合 $\emptyset$ の要素の個数は 0 です：$|\emptyset|=0$ ．

$\boxed{\text{例}}$ 集合 A と集合 B とを次のように定めます：

$$A=\{\,n\mid n\text{ は0以上17以下の整数で3の倍数}\,\}=\{0,3,6,9,12,15\}\ ,$$
$$B=\{\,n\mid n\text{ は0以上17以下の整数で4の倍数}\,\}=\{0,4,8,12,16\}\ ,$$

この集合 A と B とに対して，

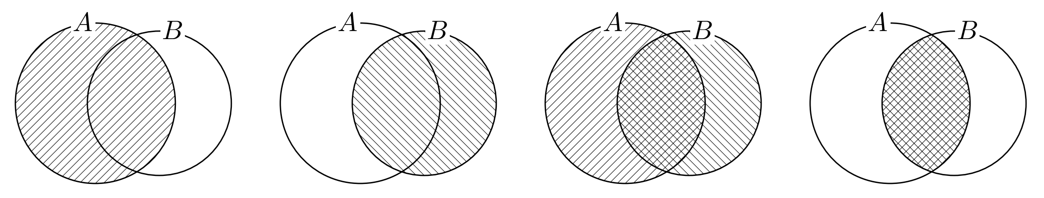
$$A\cup B=\{0,3,4,6,8,9,12,15,16\}\ ,$$
$$A\cap B=\{0,12\}\ .$$



$|A|=6$ ，$|B|=5$ ，$|A\cup B|=9$ ，$|A\cap B|=2$ ですから，$|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$ です．

$\boxed{\text{終}}$

一般的に述べます． 有限集合 A の要素の個数 $|A|$ と有限集合 B の要素の個数 $|B|$ とを足すと，共通部分 $A\cap B$ の要素は2重に数えられます． 従って，$|A|+|B|$ は，合併集合 $A\cup B$ の要素の個数 $|A\cup B|$ に共通部分 $A\cap B$ の要素の個数 $|A\cap B|$ を足した数になります．



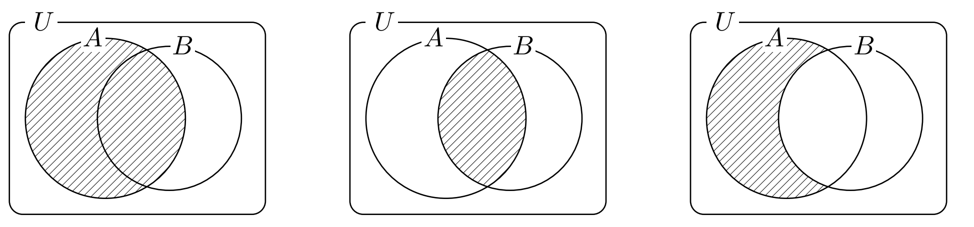
集合 A の要素の個数 ＋ 集合 B の要素の個数 ＝ 集合 $A\cup B$ の要素の個数 ＋ 集合 $A\cap B$ の要素の個数

つまり $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$ ．

定理 0.9.1 有限集合 A と B とについて，

$$|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|\ .$$

全体集合 U の部分集合 A は有限集合であるとします． U の部分集合 B に対して，集合 A を，A に属し B にも属す対象の全体 $A\cap B$ と，A に属し B には属さない対象の全体 $A\cap\overline{B}$ とに分けることができます． このとき A の要素の個数は $A\cap B$ の要素の個数と $A\cap\overline{B}$ の要素の個数との和です．



集合 A の要素の個数 ＝ 集合 $A\cap B$ の要素の個数 ＋ 集合 $A\cap\overline{B}$ の要素の個数

つまり

$$|A|=|A\cap B|+\left|A\cap\overline{B}\right|\ .$$

更に，全体集合 U が有限集合のとき，$A=U$ とすると

$$|U|=|U\cap B|+\left|U\cap\overline{B}\right|\ ,$$

ここで $U\cap B=B$ かつ $U\cap\overline{B}=\overline{B}$ なので，

$$|U|=|B|+\left|\overline{B}\right|\ .$$

定理 0.9.2 全体集合 U の部分集合 A と B とについて，A が有限集合であるとき，

$$|A|=|A\cap B|+\left|A\cap\overline{B}\right|\ .$$

特に，全体集合 U が有限集合であるとき，

$$|U|=|B|+\left|\overline{B}\right|\ .$$

$\boxed{\text{例題}}$ あるマンションに住む40世帯のうち，男子小学生がいるのは11世帯であり，女子小学生がいるのは8世帯であり，男子小学生と女子小学生との両方がいるのは3世帯である． このマンションに住む世帯の中で次のような世帯の数を求める．

(1) 小学生がいる世帯．

(2) 男子小学生はいるが女子小学生はいない世帯．

(3) 小学生がいない世帯．

〔解説〕 このマンションに住む世帯の全体を全体集合 U とおき，この中で，男子小学生がいる世帯の全体を A とおき，女子小学生がいる世帯の全体を B とおく．

$$|U|=40\ ,\qquad |A|=11\ ,\qquad |B|=8\ ,\qquad |A\cap B|=3\ .$$

(1) このマンションに住む世帯の中で小学生がいる世帯の全体は集合 $A\cup B$ である． $|A|+|B|=|A\cup B|+|A\cap B|$ なので $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ ． 小学生がいる世帯の数は

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|=11+8-3=16\ .$$

(2) このマンションに住む世帯の中で，男子小学生はいるが女子小学生はいない世帯の全体は集合 $A\cap\overline{B}$ である． 従って，男子小学生はいるが女子小学生はいない世帯の数は

$$\left|A\cap\overline{B}\right|=|A|-|A\cap B|=11-3=8\ .$$

(3) このマンションに住む世帯の中で，小学生がいる世帯の全体は集合 $A\cup B$ なので，小学生がいない世帯の全体は集合 $\overline{A\cup B}$ である． 従って，小学生がいない世帯の数は

$$\left|\overline{A\cup B}\right|=|U|-|A\cup B|=40-16=24\ .$$

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 0.9.1}}$ ある高専のクラブは体育系のクラブと文化系のクラブとに分けられます． この高専のあるクラスの人数は42人で，そのうち，体育系クラブに所属している学生は26人で，文化系クラブに所属している学生は11人で，体育系クラブにも文化系クラブにも所属している学生は4人であるとします． このクラスの中で次のような学生の数を求めなさい．

(1) 体育系クラブまたは文化系クラブに所属している学生．

(2) 体育系クラブに所属しているが文化系クラブに所属していない学生．

(3) 体育系クラブにも文化系クラブにも所属していない学生．

$\boxed{\text{例題}}$ 20 以上 80 以下の整数の中で次のような整数の個数を求める．

(1) 4 の倍数．

(2) 6 の倍数．

(3) 4 と 6 との両方の倍数．

(4) 4 または 6 の倍数．

(5) 6 の倍数でない 4 倍数．

(6) 4 でも 6 でも割り切れない整数．

〔解説〕

(1) 20 以上 80 以下の 4 の倍数は，

$$20=4\times5\ ,\quad 24=4\times6\ ,\quad 28=4\times7\ ,\quad 32=4\times8\ ,\quad \ldots,\quad 80=4\times20$$

なので，それらの個数は $20-5+1=16$ ．

(2) 20 以上 80 以下の 6 の倍数は，

$$24=6\times4\ ,\quad 30=6\times5\ ,\quad 36=6\times6\ ,\quad 42=6\times7\ ,\quad \ldots,\quad 78=6\times13$$

なので，それらの個数は $13-4+1=10$ ．

(3) 整数について，4 と 6 との両方の倍数であることと，それらの最小公倍数 12 の倍数であることとは同値です． 20 以上 80 以下の 12 の倍数は，

$$24=12\times2\ ,\quad 36=12\times3\ ,\quad 48=12\times4\ ,\quad 60=12\times5\ ,\quad 72=12\times6$$

なので，それらの個数は $6-2+1=5$ ．

(4) 20 以上 80 以下整数のうちで，4 または 6 の倍数の個数は，

（6 の倍数の個数）＋（4 の倍数の個数）－（4 と 6 との両方の倍数の個数）

なので，$16+10-5=21$ ．

(5) 20 以上 80 以下の整数のうちで，6 の倍数でない 4 の倍数の個数は，

（4 の倍数の個数）－（4 と 6 との両方の倍数の個数）

なので，$16-5=11$ ．

(6) 20 以上 80 以下の整数のうちで，4 でも 6 でも割り切れない整数とは，4 の倍数でも 6 の倍数でもない整数のことである． その個数は，20 以上 80 以下の整数の個数 61 から，その中の 4 または 6 の倍数の個数 21 を引いた数，つまり $61-21=40$ ．

$\boxed{\text{終}}$

$\boxed{\text{問題 0.9.2}}$ 200 以上 700 以下の整数の中で次のような整数の個数を求めなさい．

(1) 6 の倍数．

(2) 8 の倍数．

(3) 6 と 8 との両方の倍数．

(4) 6 または 8 の倍数．

(5) 6 の倍数でない 8 の倍数．

(6) 6 でも 8 でも割り切れない整数．